Saggio sulla Geometria delle Parentesi di Poisson

Paolo Caressa

Tesi di Dottorato, A.A. 2000/2001
Università di Firenze, Dip. di Matematica *U.Dini*

O segredo da Busca é que não se acha

F. Pessoa

Introduzione

La più notevole differenza fra la prima e la seconda edizione della *Mécanique Analytique* di Lagrange, licenziate alle stampe rispettivamente nel 1788 e 1811, è l'aggiunta della teoria della variazione della costante arbitraria, frutto delle ricerche senili del grande matematico torinese, riassunte nei suoi ultimi lavori scientifici[1] : la forma che, per mezzo di queste nuove ricerche, Lagrange diede alle equazioni del moto di un sistema meccanico generalizzato è sostanzialmente quella che Hamilton avrebbe dato un quarto di secolo appresso nelle sue ricerche di ottica: sono infatti introdotte la funzione lagrangiana, la funzione hamiltoniana e, *in nuce*, il formalismo canonico. Come osservato esplicitamente da Jean-Marie Souriau[2] in quelle pagine si trova la prima descrizione di una varietà simplettica, cioè di una varietà differenziabile (che per Lagrange è una superficie i cui parametri sono proprio le costanti arbitrarie con la loro legge di cambiamento delle coordinate) con un tensore antisimmetrico, utilizzato da Lagrange per scrivere le sue parentesi scalari (cfr. [1, §3.3] e anche [73, §8.1] per una discussione tecnica del contributo di Lagrange alla Geometria Simplettica): queste erano poste in corrispondenza da Lagrange con lo studio degli integrali primi del sistema, anche se fu il suo allievo Simeon-Denis Poisson ad introdurre (cfr. [82]) la parentesi che porta il suo nome e che permette di definire, a partire da integrali primi, nuovi integrali primi del sistema di equazioni del moto.

Poisson definì la seguente classica operazione (che oggi si denota con le parentesi graffe) fra funzioni definite nello spazio delle fasi $\mathbb{R}^{2n}$ dotato delle coordinate canoniche $(q_1, ..., q_n; p_1, ..., p_n)$:

$$(F, G) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} \right)$$

Un integrale primo I del sistema canonico di hamiltoniana H è caratterizzato dalla $(I, H) = 0$ e Poisson dimostrò un teorema secondo il quale se I_1 e I_2 sono integrali primi anche (I_1, I_2) lo è; fu Jacobi (1821) a trovare una dimostrazione

[1] cfr. *Mémoire sur la Théorie des variations des élements des planètes* Mem. Cl. Sci. Math. Phys. Inst. France (1808), 1–72; *Second Mémoire sur la Théorie générale de la variation des constantes arbitraires dans les Problèmes de la Mécanique* Mem. Cl. Sci. Math. Phys. Inst. France (1809), 343-352.

[2] cfr. *La structure symplectique de la Mécanique décrite par Lagrange en 1811*, Mathématique et Sciences humaines, 1986.

immediata di questo teorema poggiando su un lemma [46] che ora porta il suo nome:

$$((F, G), H) + ((G, H), F) + ((H, F), G) = 0$$

Il metodo di Poisson per produrre integrali primi non è comunque la soluzione generale al problema dell'integrazione del sistema canonico, ma solo sotto opportune condizioni chiarite da Liouville (esistenza delle variabili azione-angolo).

Il formalismo di Poisson e Jacobi parve un semplice algoritmo della Meccanica Celeste, finché Marius Sophus Lie non si rese conto che presentava analogie (e infatti profondi legami) con le costruzioni della Geometria Differenziale delle superficie; il punto di partenza di Lie fu sostanzialmente quello di Poisson (e di ogni altro matematico del secolo XIX): l'integrazione di equazioni alle derivate parziali. Dotato di profondo intuito geometrico e grande capacità algebrica (che in quegli anni voleva dire computazionale) Lie cercò di aprire nuove strade nell'integrazione delle equazioni differenziali, ispirandosi al lavoro di Galois sulle equazioni algebriche; il suo obiettivo era infatti determinare le condizioni di integrabilità di un sistema differenziale studiando il gruppo delle simmetrie delle sue soluzioni. Nel caso delle equazioni algebriche questo era un gruppo di permutazioni (delle radici), mentre nel caso delle equazioni differenziali si trattava di un *gruppo continuo*, cioè non finito ma parametrizzato da un numero finito di indeterminate. Con questo Lie giunse alla teoria dei gruppi che portano il suo nome e che resta il suo grande contributo alla Matematica più che la teoria galoisiana delle equazioni differenziali che andava erigendo[3]: questo spiega l'inconcepibile lasso di tempo passato fra la pubblicazione dei *Trasformationsgruppen* di Lie e il riemergere delle teorie ivi sviluppate sulla geometria delle equazioni differenziali; la teoria della simmetria di queste equazioni (ad esempio la teoria delle trasformazioni di contatto) fu completamente fondata da Lie che diede anche molti esempi di applicazioni (cfr. ad esempio *Gesammelte Abhandlungen* Vol.5, Teubner, Leipzig, 1924, pp.240–310).

Lie introdusse, in particolare, un metodo di linearizzazione per lo studio delle simmetrie delle equazioni differenziali, che consiste essenzialmente nel passaggio dal gruppo all'algebra di Lie e nella successiva possibilità di ricostruire il gruppo locale a partire dall'algebra (terzo teorema di Lie): nello studio di questo problema, in particolare nella dimostrazione dell'inverso del

[3] Quest'ultima fu, in un certo senso, completata da Kolchin e Ritt che la inquadrarono nella teoria dei gruppi algebrici; comunque Lie riuscì a dimostrare l'analogo del teorema di Galois per le equazioni differenziali, mostrando che un sistema è integrabile per quadrature se e solo se il suo gruppo di Lie di simmetrie è risolubile (teorema di Lie–Bianchi). Per una esposizione moderna ma nello spirito di Lie della teoria della simmetria delle equazioni differenziali cfr. [80], [59].

terzo teorema, fu condotto alla considerazione di certe parentesi ausiliarie (cfr. [65, Kap 17]), che oggi si chiamano *parentesi di Lie–Poisson*, definite a partire dalla rappresentazione coaggiunta di un gruppo di Lie (cfr. [65, Cap. 19] che si intitola *Die dualistische der adjungirten Gruppe*). Le parentesi di Lie–Poisson soddisfano alla stessa identità di Jacobi delle parentesi di Poisson, pur essendo oggetti essenzialmente diversi (lineari questi e costanti quelle), e Lie investigò le origini di questa analogia, giungendo a definire in generale il concetto di *struttura di Poisson* [65, Cap. 8 e Cap.13, §62, Satz.2] e stabilendo l'analogo dell'identità di Jacobi per questi oggetti più generali [65, Cap.13, §62, p.235 equazione 6]. Il suo lavoro in questo senso, forse perché ausiliario alla teoria dei gruppi e delle algebre di Lie, fu sostanzialmente ignorato dai suoi epigoni e dimenticato; lo stesso Élie Cartan pur approfondendo e completando molti aspetti dell'opera del matematico norvegese sembrò ignorare del tutto gli sviluppi che il concetto di struttura di Poisson poteva avere sulla Geometria a sulla Meccanica.

Nel frattempo la teoria geometrica delle equazioni differenziali aveva subito una sistemazione da parte di Gaston Darboux[4] e Georg Ferdinand Frobenius[5], che, usando il concetto di sistema pfaffiano e il formalismo del calcolo differenziale esterno che allora andava delineandosi, diedero al problema dell'integrazione veste geometrica, usando metodi non discosti da quelli di Lie. Questo formalismo geometrico sfociò anche nella Geometria Simplettica e di Contatto, che vennero riconosciuti come gli ambienti naturali nei quali formulare il formalismo hamiltoniano e la teoria di Hamilton–Jacobi (cfr. [1], [**?**], [63], [73] e [96] per una discussione approfondita della geometria di queste teorie meccaniche).

Quando il concetto di simmetria fu reintrodotto in Geometria Simplettica (sostanzialmente la sua formulazione meccanica risale al celebre lavoro di Emmy Noether[6]) e fu formulata la teoria dell'applicazione momento (un altro concetto chiaramente espresso in [65, Capp. 17–19], in particolare cfr. p. 300 sgg.) le strutture di Lie–Poisson vennero riscoperte, in modo sostanzialmente indipendente, da Berezin [7], Kirillov [51], Konstant [55] e Souriau [96]. In particolare Kirillov e Konstant stabilirono il legame fra Geometria Simplettica e Teoria delle Rappresentazioni da un lato e Geometria Simplettica e Quantizzazione dall'altro chiarendo che le orbite dell'azione coaggiunta di un gruppo di Lie sullo spazio duale alla sua algebra sono simplettiche rispetto alla restrizione delle parentesi di Lie–Poisson, e che queste ultime possono

[4] *Sur le problème de Pfaff*, Bull. Sci. Math. **6** (1882), 14–36, 49–68.

[5] *Über das Pfaffsche Probleme*, J. Reine Angew. Math. **82** (1877), 230–315.

[6] *Invariante Variationsprobleme*, Nachr. König. Gesell. Wissen. Göttingen, Math. Phys. Kl. (1918), 235–257.

anche vedersi come la riduzione delle parentesi simplettiche sul fibrato cotangente del gruppo di Lie: di questi due approcci solo il primo pare essere già presente nell'opera di Lie.

Le parentesi simplettiche, che generalizzano secondo le linee del formalismo di Darboux e Frobenius le parentesi introdotte da Poisson, e quelle di Lie–Poisson consentirono immediatamente di formulare alcuni problemi meccanici in modo invariante e generale; questo diede l'impulso ad un loro più approfondito studio nell'ambito della meccanica sia classica che quantistica: la prima generalizzazione la diede Dirac (cfr. [31], [32]) che stabilì, in vista dei procedimenti di quantizzazione, un formalismo hamiltoniano generalizzato che consentisse la considerazione di sistemi vincolati, definendo in questo modo esempi di varietà di Poisson regolari non simplettiche. Queste furono uno dei punti di partenza per lo studio geometrico che André Lichnerowicz [64] fece delle algebre di Lie dei campi di vettori e delle funzioni sulle varietà differenziabili nel 1977; un secolo dopo Lie troviamo qui per la prima volta definite le varietà di Poisson (solo quelle regolari, in verità, escludendo dunque il caso delle strutture di Lie–Poisson). Contemporaneamente A.A. Kirillov [52] introdusse un concetto più generale di struttura di Poisson (che oggi si chiama *varietà di Jacobi*) avendo in mente la teoria delle rappresentazioni. Fu Alan Weinstein nel 1983 [104] a definire in piena generalità il concetto di varietà di Poisson (più generale di quello di Lichnerowicz e Lie e più particolare di quello di Kirillov) determinando al contempo l'analogo del Teorema di Darboux, cioè la struttura locale, per queste varietà, e riconoscendo anche per la prima volta che i prodromi e parte della teoria si trovavano già nel lavoro di Lie.

Contemporaneamente alla pubblicazione del lavoro di Weinstein [104] ove troviamo la prima teoria generale delle varietà di Poisson, V.G. Drinfel'd pubblicava una breve nota [35] nella quale sintetizzava gli aspetti geometrici del formalismo delle equazioni di Yang–Baxter, oggetto di profondi studi da parte dei ricercatori sovietici in quegli ultimi anni[7], mostrando come la struttura soggiacente a quel formalismo fosse la geometria di Poisson di certe parentesi non lineari compatibili con una struttura di gruppo di Lie: Drinfel'd era interessato a questi oggetti in quanto limiti semi-classici dei suoi gruppi quantici, cui avrebbe dedicato profonde ricerche in quegli anni. Tuttavia le strutture di Poisson da lui identificate e legate alle soluzioni dell'equazione di Yang–Baxter classica sulle algebre di Lie semplici furono i primi esempi di *gruppi di Poisson–Lie*, poi estensivamente studiati da Semenov-Tijan-Šanskij

[7] In particolare cfr. E.K. Slyanin *The quantum inverse scattering method*, J. of Soviet Math. **19** (1982) no.5 e A.A. Belavin, V.G. Drinfel'd *On the solutions of the classical Yang–Baxter equations for simple algebras*, Funct. An. Appl. **17** (1983), 159–180.

[90]–[93], Lu e Weinstein [70]. Questi fornirono nuovi esempi di varietà di Poisson assai importanti perché non ammettevano analoghi nel "mondo simplettico e costituivano quindi un nuovo filone di ricerca. Lo studio di queste strutture, e il loro legame alle questioni di quantizzazione sia geometrica che per deformazione, diede un forte impulso alla geometria di Poisson e alle sue generalizzazioni: lo stesso Drinfel'd affrontò la questione della classificazione degli spazi di Poisson omogenei, che legò alla teoria delle algebre di Hopf.

Verso l'inizio degli anni '90 la Geometria di Poisson aveva acquisito un carattere indipendente, non più legato alla Geometria Simplettica né al problema della quantizzazione. I frutti dei primi quindici anni di ricerca furono raccolti nella monografia di I. Vaisman [102] che resta l'unico lavoro interamente dedicato all'argomento (capitoli sulle varietà di Poisson si trovano in [63], [49], [80] e [73]); il tentativo di mostrare che la teoria aveva un contenuto eminentemente geometrico differenziale è il filo conduttore di quel volume, che pure sintetizza gli aspetti contemporanei della ricerca in questo settore: ad esempio il concetto di gruppoide simplettico, introdotto sostanzialmente da Karasaev [49] e Weinstein [108] (cfr. [29]). Diverse generalizzazioni di sapore geometrico sono emerse in anni recenti, in particolare il concetto di *algebroide di Lie* (cfr. [71], [17]), *algebroide di Courant* (cfr. [28]) e *struttura di Dirac generalizzata* (cfr. [27]): lo studio di questi oggetti può ben dirsi l'unico capitolo puramente geometrico differenziale della teoria delle varietà di Poisson ed è l'argomento sul quale vertono le ricerche contemporanee, specie da parte di Weinstein e dei suoi collaboratori.

* * *

Il lavoro che qui si presenta racchiude le ricerche da me svolte col sostegno della borsa di studio di Dottorato di Ricerca presso il Dipartimento di Matematica *U. Dini* dell'Università di Firenze. Si tratta di una indagine che è possibile riassumere secondo tre linee principali: l'applicazione dei concetti classici della Geometria Differenziale alle varietà di Poisson; l'introduzione di nuovi invarianti analitici per queste varietà e le loro generalizzazioni algebriche; l'estensione del calcolo integrale alle varietà di Poisson.

Il *primum movens* di queste ricerche fu l'idea di introdurre in modo sistematico le tecniche della Geometria Differenziale nell'àmbito della Geometria di Poisson, prima fra tutte la teoria delle connessioni. Una semplice combinazione del concetto di connessione con quello di struttura di Poisson porta rapidamente a risultati negativi: una varietà di Poisson non ammette, se non nel caso regolare (cioè poco più che simplettico), connessioni compatibili con la struttura di Poisson; l'idea iniziale fu quindi di adattare la nozione di connessione al nostro contesto: per farlo si è cercato in primo luogo di algebrizzare (cioè semplificare) il problema, il che ha condotto al concetto di modulo di Poisson; la necessità poi di rendere effettivi i metodi algebrici ha spinto alla ricerca di metodi analitici di approssimazione, ciò che ha motivato l'idea di introdurre il concetto di distribuzione (o funzione generalizzata) sulle varietà di Poisson; poiché, classicamente, le distribuzioni si presentano quasi sempre come integrali di funzioni sommabili, è stato naturale cercare questa presentazione anche nel caso in esame, il che ha condotto alla constatazione dell'assenza di una teoria dell'integrazione sulle varietà di Poisson e al tentativo di colmare questa lacuna.

Il primo capitolo è essenzialmente introduttivo e serve a familiarizzare il lettore con i vari aspetti della Geometria di Poisson: tutti i concetti di base della teoria, a partire dalla definizione di varietà di Poisson, ma anche i vari teoremi di struttura per queste varietà, il calcolo differenziale e la coomologia, sono qui introdotti per mezzo di esempi; poiché si tratta sostanzialmente di una organizzazione di materiale già esistente in letteratura le dimostrazioni non banali sono sostituite da riferimenti bibliografici. Particolare ènfasi è posta sul caso simplettico e lineare (strutture di Lie–Poisson) che sono gli esempi fondamentali; in particolare le strutture di Lie–Poisson costituiscono una forte motivazione allo studio delle varietà di Poisson non simplettiche e in esse si manifestano già tutti i caratteri essenziali della teoria generale.

Il secondo capitolo fornisce una trattazione generale del formalismo delle parentesi di Poisson nell'ambiente più astratto, vale a dire quello delle algebre associative: si introducono gli elementi della teoria in modo assolutamente generale, imponendo costantemente l'ipotesi di commutatività dell'algebra, limitandosi cioè alla Geometria Classica (escludendo la Geometria Non Commutativa) o, in termini fisici, alla Meccanica Classica (escludendo i procedimenti di quantizzazione). Si introduce il calcolo differenziale di Cartan e di Ricci[8] in questo contesto utilizzando il concetto di *modulo differenziale* e si sviluppa la teoria delle connessioni (senza approfondire comunque gli aspetti relativi alla K-teoria). Infine si utilizzano queste nozioni per formalizzare il calcolo differenziale di Poisson, generalmente introdotto sulle varietà, trattando il formalismo delle parentesi di Schouten, l'esistenza di una struttura di Lie sul modulo dei differenziali e la coomologia di Poisson. La nostra trattazione delle algebre di Poisson non aggiunge elementi realmente nuovi a quanto già noto ma ha, riteniamo, il merito della chiarezza (si confronti ad esempio l'approccio di Huebschmann in [44] che ricorre al formalismo di Rineheart).

Nel terzo capitolo definiamo dei nuovi oggetti, i *moduli di Poisson*, ne

[8]Una trattazione puramente algebrica di questi concetti fa parte del folklore matematico da parecchio tempo: cfr. [18].

diamo molti esempi, il che costituisce una forte motivazione alla loro considerazione, e ne discutiamo la teoria algebrica e le sue possibili ramificazioni. Il concetto di modulo di Poisson è, riteniamo, estremamente naturale, ma si presenta immediatamente assieme a tutte le difficoltà che l'ambiente astratto impone: la teoria di questi moduli, che dovrebbe costituire una "teoria delle rappresentazioni delle algebre di Poisson, non si affronta facilmente a meno di imporre ipotesi restrittive, che però noi non possiamo permetterci: poiché i nostri esempi sono geometrici, le algebre che trattiamo sono di dimensione infinita e per di più non posseggono strutture topologiche ricche (non sono algebre di Banach, ad esempio). Un concetto legato a quello di modulo di Poisson che si è imposto nella trattazione della coomologia di Poisson (che qui è sviluppata in modo puramente algebrico pur senza ricorrere all'algebra omologica coma fa Huebschmann, cfr. [44]) è quello di *rappresentazione di Poisson*: queste sono in un certo senso la linearizzazione dei moduli di Poisson e la coomologia che è possibile associare ad essi ha come caso particolare l'usuale coomologia di Poisson. Gli esempi più interessanti di queste rappresentazioni hanno natura geometrica e sono legate alla teoria delle connessioni (o meglio della sua generalizzazione datane nel capitolo precedente).

Nel quarto capitolo consideriamo gli esempi geometrici della teoria sviluppata nel capitolo precedente: i moduli e le rappresentazioni sono in questo caso le sezioni di fibrati sulla varietà di Poisson. Il modulo che gioca il ruolo principale è quello generato dai campi hamiltoniani, i cui elementi chiamiamo qui *tensori simplettici*[9] del quale diamo alcune caratterizzazioni geometriche; discutiamo anche brevemente il concetto di connessione di Poisson e proponiamo una generalizzazione. Utilizzando il calcolo tensoriale nei fibrati diamo poi delle caratterizzazioni geometriche delle differenze esistenti fra i vari concetti algebrici introdotti nel capitolo precedente. Infine trattiamo quello che a nostro avviso è un importante esempio di modulo di Poisson, vale a dire il modulo delle distribuzioni della varietà di Poisson stessa: mostriamo come questo modulo contenga più informazioni dell'algebra di Poisson; in particolare una classe di distribuzioni, che chiamiamo *distribuzioni di Casimir*, sembra giocare un ruolo centrale nella teoria locale.

Nel quinto capitolo diamo la versione algebrica di una delle coomologie introdotte per le algebre di Poisson nel terzo capitolo: si tratta della coomologia del modulo di Poisson dei campi simplettici (e più in generale dei tensori simplettici); esiste una teoria coomologica per le varietà di Poisson che risale a Lichnerowicz (cfr. [64]) ed il cui calcolo è proibitivo anche nei casi più semplici:

[9] Ci è stato fatto rilevare che questa terminologia collide con quella talora adottata per denotare i campi localmente hamiltoniani: tuttavia questo nostro abuso lessicale non induce reali ambiguità, visto che i campi localmente hamiltoniani sono generalizzati, in geometria di Poisson, da quelli che noi chiamiamo *canonici*.

la coomologia qui proposta è più restrittiva, perché trascura le informazioni trasversali alle foglie simplettiche della varietà di Poisson, ma ha il pregio della funtorialità. Il complesso che la calcola può vedersi come un complesso di “forme differenziali anche se è composto da campi di vettori; a riprova di ciò è possibile integrare un tensore simplettico lungo certe catene singolari che fanno parte di una omologia legata sempre allo spazio delle foglie. Tuttavia la coomologia da noi definita non è duale di questa omologia, e la ricerca di una tale dualità non ha ancora dato èsiti soddisfacenti. Da ultimo diamo una breve trattazione della teoria astratta della misura che sembra soggiacere al concetto di integrale qui definito: si tratta di una teoria della misura non commutativa, che possiamo definire con minori difficoltà tecniche della usuale teoria di Connes (cfr. [24]); la nostra speranza è costruire un funtore dalla categoria delle varietà di Poisson alla categoria delle algebre di von Neumann che soddisfi alcune proprietà essenziali ispirate dal concetto di “quantizzazione per come è conosciuto dalla fisica contemporanea. La costruzione che qui diamo è un frammento di questa teoria ancora da edificare.

* * *

Questo lavoro è stato composto e redatto per una lettura il più possibile gradevole e chiara: ho cercato di scrivere in tutti i dettagli, ove questo non pregiudicasse la continuità espositiva, sia le dimostrazioni che, sopra ogni cosa, gli esempi, e di spiegare sempre le motivazioni e le finalità di quanto andavo scrivendo. Per ogni risultato, anche già noto, ho cercato di fornire mie dimostrazioni: quando, tuttavia, una dimostrazione è stata ripresa dalla letteratura ne ho sempre fatto esplicita menzione indicando la fonte; analogamente ho cercato di attribuire i risultati principali risalendo ove possibile, nel citarli, alle fonti primarie. Per non rendere disagevole la lettura il lavoro è stato suddiviso in capitoli e ciascun capitolo in paragrafi, ed è stato aggiunto un indice analitico; la bibliografia si limita alle opere consultate per la stesura del lavoro e non ha alcuna pretesa di completezza in materia.

La lingua utilizzata è l'italiano (o una sua approssimazione): questo ha comportato qualche problema lessicale, in particolare sulla scelta dei vocaboli con i quali tradurre termini tecnici coniati in inglese; talvolta, per chiarezza, si è lasciato il termine inglese, come nel caso della locuzione *pull-back*, altrove si è tradotto talora con qualche difficoltà: ad esempio il termine *foliation*, usualmente reso con *foliazione*, corrisponde qui a *fogliazione*: si tratta infatti di un vocabolo che all'inglese viene dal latino *folium* e i derivati, in italiano, di questo termine palatalizzano, rendendo più realistica la mia traduzione; inoltre *fogliazione* è un termine già presente nel lessico italiano[10] (anche il termine

[10] Il *Dizionario Enciclopedico Treccani* riporta la voce **fogliazione** <-*zz*-> s. f.- In bo-

simplettico, coniato e introdotto in Matematica da H. Weyl[11], appartiene alle scienze naturali, trattandosi dell'osso di particolari specie di pesci).

tanica, sbocciamento delle gemme ed espansione delle foglie: si dice particolarmente degli alberi.

[11]cfr. il suo capolavoro *The Classical Groups. Their Invariants and Representations*, Princeton U.P., 1939, la nota a pag. 165.

Indice

INDICE DEI SIMBOLI

$\mathcal{C}'$ .... Spazio delle distribuzioni di Casimir

$C^\infty(M)$, $\mathcal{E}(M)$ .... Spazio delle funzioni infinitamente differenziabili di una varietà M

$C^\infty_c(M)$, $\mathcal{D}(M)$ .... Spazio delle funzioni differenziabili a supporto compatto su M

d_π .... Differenziale del complesso di Poisson

∇ .... Connessione

$\mathbf{D}_X$ .... derivata covariante rispetto a X

$\mathcal{D}'$ .... Spazio delle distribuzioni

$\mathcal{E}'$ .... Spazio delle distribuzioni a supporto compatto

$\Gamma(E)$ .... Sezioni differenziabili del fibrato vettoriale E

$H^p_\pi(X)$ .... Coomologia di Poisson di X

$H^\pi_p(X)$ .... Omologia di Poisson di X

$H^p_S(X)$ .... Coomologia simplettica di X

$i_X\omega$ .... Contrazione della forma ω sul campo X

$\mathcal{L}_X\omega$ .... Derivata di Lie della forma ω lungo il campo X

$\tilde{M}$ .... Spazio delle foglie della varietà di Poisson M

$P^\infty(M)$ .... Spazio delle funzioni di Poisson

Ω_A .... Spazio dei differenziali di Kähler di un'algebra A

$\Omega(M)$ .... Spazio delle 1-forme differenziali su una varietà M

$\Omega^p(M)$ .... Spazio delle p-forme differenziali su una varietà M

S_x .... Foglia simplettica passante per il punto x

$\mathfrak{S}(M)$ .... Spazio dei campi simplettici su una varietà di Poisson M

$\mathfrak{S}^p(M)$ Spazio dei tensori simplettici di ordine p su una varietà di Poisson M

$\mathfrak{X}(M)$ .... Spazio dei campi di vettori di una varietà M

$\mathfrak{X}^p(M)$ .... Spazio dei tensori antisimmetrici controvarianti di ordine p una varietà M

Capitolo 1

Esempi di varietà di Poisson

In questo primo capitolo si richiama la teoria delle varietà di Poisson mettendone in luce gli aspetti essenziali per mezzo di esempi. Si tratta quindi di una compilazione di materiale noto che appartiene agli ultimi venti anni di ricerca, e che viene qui presentato in forma sintetica secondo la visione di chi scrive. Nel §1 si introducono le parentesi di Poisson sulle varietà simplettiche e si discute in dettaglio la corrispondenza fra le proprietà algebriche delle parentesi e quelle geometriche della forma simplettica, terminando con l'introduzione della categoria delle varietà di Poisson; nel §2 si analizzano le strutture di Lie–Poisson, il principale esempio non simplettico e il più semplice esempio di struttura di Poisson non localmente costante, mettendone il luce gli aspetti che si generalizzano al caso di una varietà di Poisson qualsiasi; nel §3 si introduce la fogliazione (generalizzata) simplettica determinata da una varietà di Poisson e si mostrano alcuni esempi fondamentali; nel §4 si introducono i gruppi di Poisson–Lie, che sono una classe di esempi di varietà di Poisson che non ha luogo nel caso simplettico e che si considerano generalmente come limiti semiclassici dei gruppi quantici.

Ora e nel séguito, il termine "varietà sarà sinonimo di "varietà infinitamente differenziabile di dimensione finita, pura, di Hausdorff e paracompatta.

1.1 Parentesi di Poisson sulle varietà simplettiche

Sia (M, ω) una varietà simplettica[1]: poiché ci limitiamo al caso di oggetti di dimensione finita esiste un unico significato da attribuire alla condizione "ω è non degenere, che possiamo riformulare come segue: la mappa di fibrati

$$\omega^\flat : TM \longrightarrow T^*M$$

indotta da ω come ($X \in \mathfrak{X}(M)$)

[1] Per la teoria delle varietà simplettiche, che certo assumiamo per nota, i migliori testi di riferimento sono quelli di Meccanica, come [1], [5], [73]; per gli aspetti più puramente geometrici e topologici due ottime introduzioni sono la raccolta [6] e la monografia [75].

$$\omega^\flat(X) = -i_X\omega$$

è un isomorfismo di fibrati vettoriali[2]. In particolare ammette un isomorfismo inverso $\omega^\# : T^*M \longrightarrow TM$, che possiamo comporre con il differenziale $d : C^\infty(M) \longrightarrow \Omega^1(M)$ per ottenere una funzione $\mathbb{R}$-lineare

$$X : C^\infty(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

Un elemento che appartenga all'immagine di questa applicazione si dice *campo hamiltoniano*: è della forma $X(h)$ e lo denotiamo più semplicemente con X_h; la funzione $h \in C^\infty(M)$ si dice l'*hamiltoniana* del campo vettoriale X_h. Per definizione il campo hamiltoniano di h soddisfa alla condizione

$$i_{X_h}\omega = -dh$$

Notiamo che la funzione hamiltoniana non è univocamente determinata: la condizione $X_h = X_k$ equivale alla

$$dh = dk$$

e quindi h e k differiscono per una funzione localmente costante.

Ad esempio, se $M = \mathbb{R}^{2n}$ è dotato della struttura simplettica standard, vale a dire di coordinate $(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)$ e della forma simplettica

$$\omega = \sum_i dq_i \wedge dp_i$$

allora se $h \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ il campo hamiltoniano da essa generato è

$$X_h = \sum_i \left(\frac{\partial h}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i} \right)$$

L'importanza dei campi hamiltoniani è stata riconosciuta già da Lagrange e Poisson (cfr. [61, Vol.II], [82]), che li utilizzarono per la formulazione del problema dell'integrabilità delle equazioni del moto in termini di integrali primi: in effetti le curve integrali del campo hamiltoniano X_h sono esattamente le soluzioni delle equazioni canoniche

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial h}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial h}{\partial q_i} \end{cases}$$

[2]La scelta del segno è ovviamente convenzionale: la nostra convenzione renderà il passaggio ai campi hamiltoniani un morfismo di algebre di Lie, piuttosto che un antiomomorfismo. Questa scelta del segno è in accordo con la convenzione adottata in [63], [102] ma non in [5], [1] né in [73].

Dunque una funzione f costante sulle traiettorie del sistema hamiltoniano, vale a dire un integrale primo del sistema canonico, deve verificare la

$$X_h(f) = 0$$

Poisson scoprì una operazione per ottenere, a partire da integrali primi, nuovi integrali primi, cioè la parentesi che oggi porta il suo nome.

Torniamo al caso generale di una varietà simplettica e definiamo, per ogni $f, g \in C^\infty(M)$, la loro *parentesi di Poisson* come

$$\{f, g\} := \mathcal{L}_{X_f} g = X_f(g)$$

Ovviamente

$$\{f, g\} = X_f(g) = i_{X_f} dg = -i_{X_f} i_{X_g} \omega = \omega(X_f, X_g)$$

per antisimmetricità di ω, sicché $\{\,\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ è una operazione $\mathbb{R}$-bilineare e antisimmetrica. Inoltre, dato che i campi hamiltoniani (come tutti i campi vettoriali) definiscono derivazioni nell'algebra $C^\infty(M)$ vale l'identità di Leibniz

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g$$

Infine, come mostrato da Jacobi, l'applicazione bilineare $\{\,\}$ definisce una struttura di algebra di Lie reale su $C^\infty(M)$, in quanto è verificata l'identità di Jacobi:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0$$

che segue (anzi equivale) alla chiusura della forma simplettica. Per dimostrarla notiamo che equivale alla seguente identità di derivazione

$$\mathcal{L}_{X_h}\{f, g\} = \{\mathcal{L}_{X_h} f, g\} + \{f, \mathcal{L}_{X_h} g\}$$

che si verifica ricorrendo al flusso φ_t del campo hamiltoniano X_h: per prima cosa si osservi che questo flusso preserva le parentesi di Poisson; infatti

$$\mathcal{L}_{X_h}\omega = d i_{X_h}\omega = -d^2 h = 0$$

e quindi

$$\frac{d\varphi_t^*}{dt}\omega = \varphi_t^* \mathcal{L}_{X_h}\omega = 0$$

Dunque, per ogni $f, g \in C^\infty(M)$:

$$\varphi_t^*\{f, g\} = \{\varphi_t^* f, \varphi_t^* g\}$$

Derivando questa identità in t e valutando in $t = 0$ otteniamo

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{X_h}\{f,g\} &= \left(\frac{d}{dt}\{\varphi_t^* f, \varphi_t^* g\}\right)_{t=0} = \left(\frac{d}{dt}\omega(X_{\varphi_t^* f}, X_{\varphi_t^* g})\right)_{t=0} \\ &= \omega(X_{\mathcal{L}_{X_h} f}, X_g) + \omega(X_f, X_{\mathcal{L}_{X_h} g}) \\ &= \{\mathcal{L}_{X_h} f, g\} + \{f, X_{\mathcal{L}_{X_h} g}\}\end{aligned}$$

Una formulazione interessante dell'identità di Jacobi è[3]

$$X_{\{f,g\}} = [X_f, X_g]$$

che fra l'altro implica che i campi hamiltoniani sono una sottoalgebra di Lie dell'algebra dei campi di vettori e una rappresentazione dell'algebra di Lie $C^\infty(M)$ rispetto alle parentesi di Poisson: che questa identità equivalga a quella di Jacobi si verifica immediatamente

$$X_{\{f,g\}}(h) = \{\{f,g\},h\} = \{f,\{g,h\}\} - \{g,\{f,h\}\} = [X_f, X_g](h)$$

Definizione 1.1.1 *L'algebra di Lie dei campi di vettori della forma X_f ($f \in C^\infty(M)$) si denota con* Ham(M) *e si dice* algebra dei campi hamiltoniani *di M.*

Si osservi che, essendo $\omega^\# : T^*M \longrightarrow TM$ un isomorfismo, il $C^\infty(M)$-modulo generato dall'algebra di Lie reale Ham(M) coincide con l'intero modulo $\mathfrak{X}(M)$ dei campi vettoriali di M: in effetti è immagine del sottomodulo di $\Omega^1(M)$ generato dallo spazio dei differenziali esatti che è $\Omega^1(M)$ stesso e, dato che $X_f = \omega^\# df$, lo spazio delle forme esatte è isomorfo a quello dei campi hamiltoniani sicché anche i moduli da essi generati sono isomorfi, essendo $\omega^\#$ un isomorfismo di fibrati vettoriali.

Notiamo che nel dedurre l'identità di Jacobi abbiamo usato in modo essenziale la condizione di integrabilità della struttura simplettica $d\omega = 0$. In effetti questa condizione equivale all'identità di Jacobi per le parentesi di Poisson: precisamente, se ω è una 2-forma non degenere ma non necessariamente chiusa, possiamo comunque definire l'isomorfismo $\omega^\# : T^*M \longrightarrow TM$ e quindi la funzione $X : C^\infty(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ e, per tramite di essa, le parentesi $\{f,g\} = X_f(g)$; queste saranno bilineari e antisimmetriche (essendo ω una 2-forma), e verificheranno l'identità di Leibniz perché X ha immagine in $\mathfrak{X}(M)$;

[3] Si tratta della formulazione che lo stesso Jacobi le diede originariamente.

supponiamo ora che $\{\,\}$ verifichino anche l'identità di Jacobi, e calcoliamo

$$\begin{aligned} d\omega(X_f, X_g, X_h) &= \mathcal{L}_{X_f}\omega(X_g, X_h) - \mathcal{L}_{X_g}\omega(X_f, X_h) + \mathcal{L}_{X_h}\omega(X_f, X_g) - \\ &\quad - \omega([X_f, X_g], X_h) + \omega([X_f, X_h], X_g) - \omega([X_g, X_h], X_f) \\ &= \mathcal{L}_{X_f}\{g, h\} - \mathcal{L}_{X_g}\{f, h\} + \mathcal{L}_{X_h}\{f, g\} - \\ &\quad - \omega(X_{\{f,g\}}, X_h) + \omega(X_{\{f,h\}}, X_g) - \omega(X_{\{g,h\}}, X_f) \\ &= \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \\ &\quad - \{\{f, g\}, h\} - \{\{h, f\}, g\} - \{\{g, h\}, f\} \\ &= 2(\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\}) = 0 \end{aligned}$$

Poiché i campi hamiltoniani generano il modulo dei campi di vettori questa verifica basta a mostrare che $d\omega = 0$.

La presenza delle parentesi di Poisson consente di riformulare nel linguaggio delle funzioni tutti i risultati geometrici espressi nel linguaggio delle forme differenziali; ad esempio le equazioni canoniche possono semplicemente scriversi come

$$\dot{f} = \{h, f\}$$

è ora evidente che le costanti del moto sono esattamente le funzioni che commutano con l'hamiltoniana: l'essere la forma simplettica non degenere può quindi riformularsi dicendo che le uniche costanti del moto per ogni sistema hamiltoniano rispetto a quella forma sono le funzioni localmente costanti.

Le funzioni localmente costanti possono essere pensate come la componente $H^0(M)$ di grado zero della coomologia di de Rham della varietà; possiamo anche dare una interpretazione coomologica per i campi hamiltoniani. Infatti abbiamo già osservato come i campi hamiltoniani siano immagine delle 1-forme esatte; è naturale chiedersi a cosa corrispondano le forme chiuse: basta riscrivere la condizione $d\omega^\flat X = 0$ come

$$0 = d\omega^\flat X = -di_X\omega = -i_X d\omega - di_X\omega = -\mathcal{L}_X\omega$$

Dunque i campi che corrispondono alle forme chiuse sono quelli lungo i quali la forma simplettica è costante: in termini di parentesi di Poisson

$$\mathcal{L}_X\{f, g\} = \{\mathcal{L}_X f, g\} + \{f, \mathcal{L}_X g\}$$

Un campo siffatto si chiama *localmente hamiltoniano* perché, in virtù del lemma di Poincaré, la forma che gli corrisponde è localmente esatta. Dunque $H^1(M)$ misura quanti campi di vettori localmente hamiltoniani non sono hamiltoniani. Notiamo infine che esiste una successione esatta

$$0 \longrightarrow H^0(M) \longrightarrow C^\infty(M) \longrightarrow \mathrm{Loc}(M) \longrightarrow H^1(M) \longrightarrow 0$$

ove $\mathrm{Loc}(M)$ denota lo spazio dei campi localmente hamiltoniani, e una successione esatta

$$0 \longrightarrow H^0(M) \longrightarrow C^\infty(M) \longrightarrow \mathrm{Ham}(M) \longrightarrow 0$$

Sia $\mathrm{Loc}(M)$ che $\mathrm{Ham}(M)$ sono algebre di Lie: infatti $[X_f, X_g] = X_{\{f,g\}}$ e $\mathcal{L}_{[X,Y]} = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]$ il che implica che se $\mathcal{L}_X\omega = \mathcal{L}_Y\omega = 0$ anche $\mathcal{L}_{[X,Y]}\omega = 0$. Si noti inoltre che $\mathrm{Ham}(M)$ è un ideale di Lie in $\mathrm{Loc}(M)$:

$$[X, X_f](g) = \mathcal{L}_X\{f,g\} - \{f, \mathcal{L}_X g\} = \{\mathcal{L}_X f, g\} = X_{\mathcal{L}_X f}(g)$$

Rammentiamo ora qualche esempio di varietà simplettica: intanto abbiamo il caso lineare, che possiamo formulare in modo intrinseco come segue: sia V uno spazio vettoriale e V^* il suo spazio duale. Allora su $V \times V^*$ esiste una forma simplettica (lineare!) data da

$$\omega_{(v,\varphi)}((w,\psi),(z,\chi)) = \chi(w) - \psi(z)$$

ove $(v,\varphi) \in V \times V^*$ è il punto nel quale la forma è calcolata e $(w,\psi),(z,\chi) \in T_{(v,\varphi)}(V \times V^*)$ sono vettori tangenti nel punto (usiamo l'identificazione fra lo spazio tangente in un punto e lo spazio stesso per mezzo della traslazione). Ovviamente questa forma è costante e non degenere; che sia chiusa è facile vederlo, anzi è semplice verificarne l'esattezza: se Θ è la 1-forma definita nel punto (v,φ) come

$$\Theta_{(v,\varphi)}(w,\psi) = \varphi(w)$$

allora $\omega = -d\Theta$. La 1-forma Θ si dice *forma di Liouville* e la sua relazione con la forma simplettica si verifica facilmente nelle coordinate canoniche: si tratta di scegliere un qualsiasi sistema di coordinate $(q_1, ..., q_n)$ in V, il che induce una scelta di coordinate duali $(p_1, ..., p_n)$ in V^*: allora è immediato verificare che

$$\Theta = \sum_i p_i dq_i$$

e quindi che

$$-d\Theta = \sum_i dq_i \wedge dp_i = \omega$$

Si noti che questa discussione può farsi nel caso in cui V abbia dimensione infinita, sebbene in tal caso sia necessario specificare in che senso la forma ω è non degenere (cfr. [20], [73]).

In ogni caso le parentesi di Poisson di due funzioni $F, G \in C^\infty(V \times V^*)$ si scrivono facilmente tenendo conto del fatto che $C^\infty(V \times V^*) \cong C^\infty(V) \otimes$

$C^\infty(V^*)$ (cfr. [101, p.531]) e che quindi possiamo scrivere $F = f \otimes \varphi$ e $G = g \otimes \gamma$, col che

$$\{f \otimes \varphi, g \otimes \gamma\} = d\gamma(df) - d\varphi(dg)$$

Ad esempio, fissate delle coordinate $(q_1, ..., q_n)$ su V (e quindi le loro coordinate duali $(p_1, ..., p_n)$ su V^*) abbiamo che

$$\begin{aligned}\{f \otimes \varphi, g \otimes \gamma\} &= \langle \sum_i \frac{\partial \gamma}{\partial p_i} p_i, \sum_j \frac{\partial f}{\partial q_j} q_j \rangle - \langle \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} p_i, \sum_j \frac{\partial g}{\partial q_j} q_j \rangle \\ &= \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} \right)\end{aligned}$$

cioè l'usuale espressione delle parentesi di Poisson quale si ritrova ad esempio in [82].

L'importanza del caso lineare è dovuta al teorema di Darboux:

Teorema (Darboux) **1.1.2** *Se (M, ω) è una varietà simplettica, per ogni $x \in M$ esiste una carta locale $U \ni x$ con coordinate $(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)$ nella quale la forma simplettica è costante (e quindi isomorfa alla forma simplettica standard).*

Ricordiamo brevemente l'elegante argomento dato da Moser in [77] per dimostrare questo teorema (argomento valido anche in dimensione infinita quando la forma è fortemente non degenere, ad esempio nel caso di spazi riflessivi): poiché l'enunciato del teorema si riferisce ad una carta locale possiamo supporre che M sia uno spazio vettoriale simplettico e $x = 0$. Se $\omega_0 = \omega(0)$ e $\tilde{\omega} = \omega - \omega_0$ allora, per il lemma di Poincaré e la simpletticità di ω, esiste una 1-forma α tale che $d\alpha = \tilde{\omega}$ e, a meno di sostituire α con $\alpha - \alpha(0)$, possiamo supporre che $\alpha(0) = 0$. Ora entra in gioco l'ipotesi di non degenerazione della forma ω, che consente di definire un campo vettoriale dipendente dal tempo X_t come

$$i_{X_t}\omega_t = -\alpha$$

ove $\omega_t = \omega + t\tilde{\omega}$ è ovviamente chiusa e non degenere. La condizione $\alpha(0) = 0$ implica $X_t(0) = 0$ e quindi possiamo integrare l'equazione differenziale associata al campo X_t intorno a 0: il flusso del campo φ_t sarà tale che φ_0 =identità e quindi

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t^*\omega_t) = \varphi_t^*(\mathcal{L}_{X_t}\omega_t) + \varphi_t^* \frac{d}{dt}\omega_t = \varphi_t^* d i_{X_t}\omega_t + \varphi_t^*\tilde{\omega} = \varphi_t^*(d(-\alpha) + \tilde{\omega}) = 0$$

sicché φ_1 è un diffeomorfismo che trasforma ω in ω_0.

È immediato generalizzare l'esempio di uno spazio vettoriale simplettico al caso del fibrato cotangente di una varietà differenziabile M: allora possiamo definire una 1-forma su T^*M usando ad esempio le coordinate locali $(x_1, ..., x_n; \xi_1, ..., \xi_n)$ su T^*M come

$$\Theta = \sum_i \xi_i dx_i$$

e quindi una forma simplettica $\omega = -d\Theta$.

Una classe di esempi di varietà simplettiche assai rilevante è data dalle varietà kähleriane: si tratta di varietà complesse (M, J) dotate di una metrica riemanniana g compatibile

$$g(JX, Y) + g(X, JY) = 0$$

e tale che la struttura complessa sia parallela rispetto alla connessione indotta dalla metrica: $\nabla J = 0$. Possiamo allora definire una 2-forma differenziale come

$$\omega(X, Y) = g(JX, Y)$$

Dato che g è una metrica riemanniana la forma ω è non degenere, e la condizione $\nabla J = 0$ implica $d\omega = 0$: infatti ω è parallela perché lo sono g e J, quindi è chiusa (cfr. [53] Vol.II). Dunque, se $g^\# : T^*M \longrightarrow TM$ è l'isomorfismo indotto dal tensore non degenere g, i campi hamiltoniani X_f sono della forma $Jg^\# df$; cioè le parentesi di Poisson si scrivono in termini della metrica e della struttura complessa.

L'esempio elementare di varietà kähleriana è uno spazio di Hilbert complesso $\mathcal{H}$, equipaggiato del suo prodotto scalare hilbertiano $(,)$; in questo caso la metrica riemanniana è la parte reale del prodotto hilbertiano e la forma simplettica ne è la parte immaginaria:

$$(v, w) = g(v, w) + i\omega(v, w)$$

L'altro esempio fondamentale, rilevantissimo in Meccanica Quantistica e Geometria Algebrica, è lo spazio proiettivo complesso, cioè lo spazio $\mathbb{P}\mathcal{H}$ delle rette complesse per l'origine in uno spazio di Hilbert complesso $\mathcal{H}$. Lo spazio $\mathbb{P}\mathcal{H}$, come $\mathcal{H} \setminus \{0\}$, è una varietà complessa (con spazio tangente in v isomorfo a $\mathcal{H}/v\mathbb{C}$) e la proiezione canonica $\pi : \mathcal{H} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}\mathcal{H}$ che al vettore $v \in \mathcal{H}$ assegna la retta $v\mathbb{C}$ da esso generata è una submersione suriettiva. La metrica hermitiana (*metrica di Fubini-Study*) su $\mathbb{P}\mathcal{H}$ è data da

$$h((d\pi)_v(w_1), (d\pi)_v(w_2)) = (w_1, w_2)$$

(per $v \in \mathcal{H}$ con $||v|| = 1$, $w_1, w_2 \in T_v\mathbb{P}\mathcal{H} \cong (v\mathbb{C})^\perp$); la sua parte reale è una metrica riemanniana e la sua parte complessa una forma simplettica (cfr. [53, Vol. II]).

Gli esempi che abbiamo dato di varietà simplettiche sono formulati in termini strettamente geometrici, cioè esibendo una forma simplettica; per determinare le parentesi di Poisson su queste varietà è quindi necessario applicare i procedimenti generali esposti in precedenza, che possiamo riassumere nel seguente schema:

Forma simplettica	$\longleftrightarrow$	Parentesi di Poisson
$d\omega = 0$	$\longleftrightarrow$	Identità di Jacobi
ω non degenere	$\longleftrightarrow$	$\bigcap \ker X_f = H^0$

Il fatto che le frecce in questo schema siano invertibili è una osservazione dovuta a Pauli e Jost (cfr. [81] e [47]; Souriau in [96] attribuisce a Maxwell l'equivalenza fra l'identità di Jacobi e la condizione di cociclo):

Teorema (PAULI–JOST) **1.1.3** *Se sull'algebra $C^\infty(M)$ di una varietà M esiste una struttura di algebra di Lie $\{\}$ le cui parentesi soddisfino l'identità di Leibniz e il cui centro sia ridotto alle funzioni localmente costanti allora M possiede una struttura simplettica le cui parentesi di Poisson sono date dalle $\{\}$.*

Questo legittima un modo alternativo di studiare la geometria simplettica, cioè partire direttamente dalla presenza delle parentesi di Poisson e spostare quindi l'attenzione dal punto di vista geometrico a quello analitico, cosa che possiamo formalizzare con la seguente definizione, la cui storia è assai complicata e che, per quanto formulata da Kirillov e Lichnerowicz negli anni '70 del XX secolo, può ascriversi a Sophus Lie (cfr. [65, p.237]):

Definizione 1.1.4 *Una varietà M si dice* varietà di Poisson *se l'algebra delle funzioni $C^\infty(M)$ possiede una struttura di algebra di Lie $\{\}$ in modo che l'identità di Leibniz*

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}f$$

sia verificata per ogni $f, g, h \in C^\infty(M)$. Le parentesi di Lie $\{\}$ si dicono parentesi di Poisson della varietà.

La discussione che abbiamo fin qui svolto mostra come ogni varietà simplettica sia una varietà di Poisson: ovviamente non vale il viceversa. Infatti non imponiamo nessuna condizione sulle parentesi di Poisson che sia paragonabile alla non degenerazione della forma simplettica. In effetti un esempio banale di varietà di Poisson è la *varietà di Poisson nulla*, dotata cioè delle parentesi $\{f, g\} \equiv 0$ che corrisponde al caso di un'algebra di Lie abeliana. Qualsiasi varietà può banalmente essere equipaggiata di questa struttura di Poisson, che non aggiunge né toglie nulla alla varietà ovviamente, ma che rende conto della diversità fra la teoria di Poisson e quella simplettica: la prima non possiede alcun tipo di rigidità, vale a dire che non esistono varietà che non supportino strutture di Poisson, mentre è ben noto che vi sono varietà anche non topologicamente complicate che non posseggono struttura simplettica alcuna.

Se M è una varietà di Poisson possiamo evidentemente definire la mappa hamiltoniana $X : C^\infty(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ come

$$X_f(g) := \{f, g\}$$

Allora le identità di Leibniz e Jacobi si scrivono come

$$\begin{aligned} X_{fg} &= fX_g + gX_f \\ X_{\{f,g\}} &= [X_f, X_g] \end{aligned}$$

I campi hamiltoniani sono, come nel caso simplettico, le immagini delle funzioni per tramite della mappa X e ha ovviamente ancora senso definire i campi localmente hamiltoniani. Si noti tuttavia che in generale i campi localmente hamiltoniani *non sono* caratterizzati dalla

$$\mathcal{L}_X\{f, g\} = \{\mathcal{L}_X f, g\} + \{f, \mathcal{L}_X g\}$$

Un campo X che verifichi questa equazione è quindi esattamente una derivazione dell'algebra di Lie $C^\infty(M)$ rispetto alle parentesi di Poisson.

Definizione 1.1.5 *Un campo vettoriale X che sia una derivazione dell'algebra di Lie delle parentesi di Poisson su una varietà M si dice* campo canonico *o anche* automorfismo infinitesimale della struttura di Poisson. *Lo spazio formato dai campi canonici si denota con* Can(M)*.*

In generale:

$$\mathrm{Ham}(M) \subsetneq \mathrm{Loc}(M) \subsetneq \mathrm{Can}(M)$$

Ad esempio su una varietà di Poisson nulla (con parentesi identicamente nulle) abbiamo $\mathrm{Ham}(M) = \mathrm{Loc}(M) = 0$, mentre $\mathrm{Can}(M) = \mathfrak{X}(M)$.

Il nucleo della mappa X non sarà in generale ridotto alle sole funzioni localmente costanti.

Definizione 1.1.6 *Una funzione $c \in C^\infty(M)$ tale che $\{c, f\} = 0$ per ogni $f \in C^\infty(M)$ si dice* funzione di Casimir. *Lo spazio delle funzioni di Casimir si denota con* Cas(M)*.*

Le funzioni di Casimir sono dunque gli elementi del centro dell'algebra di Lie delle parentesi di Poisson. Ancora possiamo scrivere la successione esatta di algebre di Lie

$$0 \longrightarrow \mathrm{Cas}(M) \longrightarrow C^\infty(M) \longrightarrow \mathrm{Ham}(M) \longrightarrow 0$$

Definizione 1.1.7 *Se* $(M, \{\,\}_M)$ *e* $(N, \{\,\}_N)$ *sono varietà di Poisson una* funzione di Poisson *è una funzione differenziabile* $F : M \longrightarrow N$ *tale che*

$$F^*\{f, g\}_N = \{F^*f, F^*g\}_M$$

per ogni $f, g \in C^\infty(N)$*. Lo spazio delle funzioni di Poisson si denota con* $P^\infty(M, N)$*.*

Si noti che, se (M, ω_M) e (N, ω_N) sono varietà simplettiche una mappa canonica $F : M \longrightarrow N$ nel senso usuale del termine, cioè tale che

$$\omega_M = F^*\omega_N$$

non è necessariamente una mappa di Poisson. Ad esempio possiamo considerare l'inclusione $I : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ rispetto alle strutture simplettiche canoniche definita come

$$I(q, p) = (q, 0, p, 0)$$

ove (q, p) e (q_1, q_2, p_1, p_2) sono le coordinate canoniche nei rispettivi spazi. Allora

$$I^*(dq_1 \wedge dp_1 + dq_2 \wedge dp_2) = I^*dq_1 \wedge I^*dp_1 + I^*dq_2 \wedge I^*dp_2 = I^*dq_1 \wedge I^*dp_1 = dq \wedge dp$$

Tuttavia $I^*\{q_2, p_2\} = 1$ mentre $\{I^*q_2, I^*p_2\} = 0$; cioè I è una trasformazione simplettica ma non di Poisson. Se invece consideriamo la proiezione $P : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definita come

$$P(q_1, q_2, p_1, p_2) = (q_1, p_1)$$

allora abbiamo certamente una mappa di Poisson, mentre

$$P^*(dq \wedge dp) = P^*dq \wedge P^*dp = dq_1 \wedge dp_1 \neq dq_1 \wedge dp_1 + dq_2 \wedge dp_2$$

cioè P non è simplettica.

Questi due controesempi mostrano anche il motivo per il quale i concetti di applicazione simplettica e di Poisson sono distinti: le mappe simplettiche "tendono ad essere immersioni, mentre quelle di Poisson sottoimmersioni. Allora, come ci si può attendere:

Proposizione 1.1.8 *Se $F : M \longrightarrow N$ è un diffeomorfismo locale fra varietà simplettiche, è una mappa simplettica se e solo se è di Poisson.*

DIMOSTRAZIONE: Una mappa $F : M \longrightarrow N$ è di Poisson se e solo se data una funzione $f \in C^\infty(N)$ qualsiasi esiste la F-relazione seguente fra i campi hamiltoniani:

$$\forall f \in C^\infty(N) \qquad F_* X_{f\circ F} = X_f$$

(basta scrivere $\{f, g\}$ come $X_f(g)$). Allora, $\omega_M = F^*\omega_N$ se e solo se

$$F^*\{f, g\}_N = \omega_M(F^*X_f, F^*X_g) = \omega_M(X_{f\circ F}, X_{g\circ F}) = \{f \circ F, g \circ F\}_M$$

QED

Si noti che è possibile usare la relazione $F_* X_{f\circ F} = X_f$ per ogni f solo se F è un diffeomorfismo locale, altrimenti F_* non sarebbe nemmeno definita.

Ovviamente la composizione di applicazioni di Poisson è di Poisson sicché è ben definito il gruppo dei diffeomorfismi di Poisson; ad esempio il flusso di un campo hamiltoniano, come abbiamo visto, definisce un gruppo ad 1-parametro di diffeomorfismi di Poisson.

1.2 Strutture di Lie–Poisson

La prima e principale differenza esistente fra le parentesi di Poisson qualsiasi e quelle simplettiche risiede nella struttura locale. Esiste un analogo del teorema di Darboux per le varietà di Poisson (dovuto a Lie e a Weinstein nella sua forma più generale) che rende conto della ricchezza e complessità della teoria già nel caso locale, e che vogliamo discutere in questo paragrafo.

Per prima cosa notiamo che le parentesi di Poisson su una varietà di Poisson inducono sempre un 2-tensore controvariante antisimmetrico: deve cioè esistere una sezione π di $\bigwedge^2 TM$ tale che

$$\{f, g\} = \pi(df, dg) = \langle \pi, df \wedge dg\rangle = i_\pi(df \wedge dg)$$

Infatti l'identità di Lebiniz implica che la mappa $(f, g) \mapsto \{f, g\}$ è una biderivazione antisimmetrica dell'algebra associativa $C^\infty(M)$, e quindi si identifica ad un 2-tensore antisimmetrico controvariante $\pi \in \Gamma(\bigwedge^2 TM)$.

È spontaneo chiedersi se non si possa definire la struttura di Poisson in termini del solo tensore π, e infatti è possibile: l'unica restrizione che dobbiamo imporre è l'identità di Jacobi, che costituirà la condizione di integrabilità della struttura di Poisson. Il seguente teorema è dovuto a Lichnerowicz [64] e, nella sua veste locale, a Lie [65], anche se il nostro enunciato è diverso nella forma:

Teorema (LIE–LICHNEROWICZ) **1.2.1** *Un tensore $\pi \in \Gamma(\bigwedge^2 TM)$ definisce per mezzo della*

$$\{f,g\} := \pi(df,dg)$$

delle parentesi di Poisson su una varietà M se e solo se

$$(*) \qquad i_\pi d i_\pi \omega = \frac{1}{2} i_{\pi\wedge\pi} d\omega$$

per ogni 3-forma ω.

DIMOSTRAZIONE: Supponiamo che valga la condizione (*) sul tensore π: allora

$$\begin{aligned}
i_\pi d i_\pi(df\wedge dg\wedge dh) &= \frac{1}{3}(i_\pi d\pi(df,dg)\wedge dh - d\pi(df,dh)\wedge dg + d\pi(dg,dh)\wedge df)\\
&= \frac{1}{3}(\pi(d\{f,g\}\wedge dh) - \pi(d\{f,h\},dg) + \pi(d\{g,h\},df))\\
&= \frac{1}{3}(\{\{f,g\},h\} + \{\{h,f\},g\} + \{\{g,h\},f\})
\end{aligned}$$

e quindi la (*) implica l'identità di Jacobi per le parentesi di Poisson. Viceversa, l'identità di Jacobi implica la (*) per forme esatte (per lo stesso calcolo appena svolto), mentre, se $a \in C^\infty(M)$:

$$\begin{aligned}
i_\pi d i_\pi(adf\wedge dg\wedge dh) &= i_\pi d a i_\pi(df\wedge dg\wedge dh)\\
&= i_\pi da\wedge i_\pi(df\wedge dg\wedge dh) + a i_\pi d i_\pi(df\wedge dg\wedge dh)\\
&= i_\pi da\wedge i_\pi(df\wedge dg\wedge dh) = i_{\pi\wedge\pi} d(adf\wedge dg\wedge dh)
\end{aligned}$$

e quindi la (*) segue dall'identità di Jacobi per combinazioni $C^\infty(M)$-lineari di forme esatte, cioè per forme qualsiasi.

QED

Dunque potremmo definire una varietà di Poisson come una coppia (M,π) ove $\pi \in \Gamma(\bigwedge^2 TM)$ soddisfa alla (*).

Definizione 1.2.2 *Un tensore $\pi \in \Gamma(\bigwedge^2 TM)$ soddisfacente alla (*) del teorema precedente si dice* tensore di Poisson *sulla varietà M.*

Una ulteriore caratterizzazione delle parentesi di Poisson in termini tensoriali procede come segue: il tensore di Poisson induce una mappa differenziabile (questo fatto è del tutto analogo al caso della forma simplettica, solo che in questo caso il ruolo del fibrato tangente e cotangente è scambiato)

$$\pi^\# : \Omega^1 M \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

come
$$\pi^{\#}\alpha = i_\pi \alpha$$
Questo operatore ovviamente non è un isomorfismo né, in generale, una mappa di fibrati visto che il rango del tensore di Poisson può non essere costante (in altri termini il nucleo e l'immagine di $\pi^{\#}$ non sono fibrati ma solo fasci nel caso generale). Comunque
$$\{f,g\} = \pi(df,dg) = \langle \pi^{\#}df, dg\rangle$$
da cui segue in particolare che
$$X_f = \pi^{\#}df$$
Dunque una struttura di Poisson può anche definirsi come una mappa $\pi^{\#}$ antisimmetrica ($\langle \pi^{\#}df, dg\rangle + \langle df, \pi^{\#}dg\rangle = 0$) e tale che
$$\langle \pi^{\#}\mathcal{L}_{\pi^{\#}\alpha_1}\alpha_2, \alpha_3\rangle + \langle \pi^{\#}\mathcal{L}_{\pi^{\#}\alpha_2}\alpha_3, \alpha_1\rangle + \langle \pi^{\#}\mathcal{L}_{\pi^{\#}\alpha_3}\alpha_1, \alpha_2\rangle = 0$$
per ogni terna di 1-forme differenziali $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Infatti
$$\langle \pi^{\#}\mathcal{L}_{\pi^{\#}df_1}df_2, df_3\rangle = \langle \pi^{\#}d\mathcal{L}_{X_{f_1}}f_2, df_3\rangle = \langle \pi^{\#}d\{f_1,f_2\}, df_3\rangle = \{\{f_1,f_2\},f_3\}$$

In séguito daremo una formulazione di questa condizione di integrabilità in un contesto più generale (che è come usualmente viene introdotta) usando il formalismo di Schouten–Nijenhuis. Qui invece, visto che siamo interessati a chiarire la natura locale delle parentesi di Poisson su una varietà, vediamo come la condizione del teorema precedente si scrive in coordinate, seguendo sostanzialmente Lie (cfr. [65, Cap.13, §62]). Fissiamo dunque un sistema di coordinate locali $(x_1, ..., x_n)$ intorno a qualche punto della nostra varietà di Poisson M: per semplificare (ciò che è equivalente) limitiamoci dunque a considerare $M = \mathbb{R}^n$ con delle coordinate $(x_1, ..., x_n)$; supponiamo data su M una struttura di Poisson $\{\,\}$:
$$\{f,g\} = X_f(g)$$
X_f è un campo vettoriale, quindi
$$X_f = \sum_i \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$
ove $\xi_i \in C^\infty(M)$. Se calcoliamo il campo X_f sulle funzioni coordinate otteniamo
$$\{f, x_i\} = X_f(x_i) = \xi_i$$

Dunque

$$\{f,g\} = \sum_i \{f, x_i\} \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

Ora, per $f = x_j$, otteniamo (si rammenti l'antisimmetricità di $\{\ \}$)

$$\{g, x_j\} = \sum_i \{x_i, x_j\} \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

col che

$$X_g = \sum_i \sum_j \{x_i, x_j\} \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Dunque l'espressione generale delle parentesi di Poisson è

$$\{f,g\} = \sum_i \sum_j \{x_i, x_j\} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}$$

il che dimostra che le parentesi stesse sono completamente determinate, nel sistema di coordinate scelto, dalla matrice di funzioni $((\{x_i, x_j\}))$. Notiamo che fin qui non abbiamo usato l'identità di Jacobi per le parentesi di Poisson in alcun modo: la conclusione che abbiamo tratto senza di essa è che la struttura di Poisson è indotta da una matrice π i cui elementi sono le parentesi di Poisson delle funzioni coordinate, e questa matrice non è altri che il tensore di Poisson scritto in coordinate (precisamente gli elementi della matrice sono le componenti del tensore).

Ora consideriamo un qualsiasi tensore doppio controvariante π in $\mathbb{R}^n$ nelle coordinate scelte: avrà la forma

$$\pi = \sum_i \sum_j \pi_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}$$

La condizione (*) del teorema di Lie–Lichnerowicz si scrive allora come segue:

Criterio di Integrabilità (Lie) **1.2.3** *Il tensore antisimmetrico* $\pi = ((\pi_{ij}))$ *è di Poisson se e solo se*

$$\text{(Lie)} \qquad \sum_l \left(\pi_{li} \frac{\partial \pi_{jk}}{\partial x_l} + \pi_{lj} \frac{\partial \pi_{ki}}{\partial x_l} + \pi_{lk} \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_l} \right) = 0$$

DIMOSTRAZIONE: Per prima cosa notiamo che se π è un tensore di Poisson allora nelle coordinate scelte soddisfa la condizione (Lie); basta infatti scrivere in coordinate la condizione di integrabilità ponendo $\omega = dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k$:

$$\begin{aligned} i_\pi d i_\pi (dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k) &= \frac{1}{3} i_\pi (d\pi_{ij} \wedge dx_k - d\pi_{ik} \wedge dx_j + d\pi_{jk} \wedge dx_i) \\ &= \frac{1}{3} \sum_l \left(\pi_{lk} \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_l} + \pi_{lj} \frac{\partial \pi_{ki}}{\partial x_l} + \pi_{li} \frac{\partial \pi_{jk}}{\partial x_l} \right) \end{aligned}$$

Il secondo membro della (*) è nullo poiché la forma $dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k$ è chiusa, quindi otteniamo la (Lie).

Ora mostriamo il viceversa, cioè che (Lie) $\Longrightarrow$ (*): dato che (*) equivale all'identità di Jacobi per le parentesi di Poisson dimostriamo direttamente quest'ultima, nella forma

$$X_{\{f,g\}} = [X_f, X_g]$$

In effetti:

$$\begin{aligned} X_{\{f,g\}} = X_{\sum_{i,j} \pi_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}} &= \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} X_{\pi_{ij}} + \sum_{i,j} \pi_{ij} X_{\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}} \\ &= \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} X_{\pi_{ij}} + \sum_{i,j} \pi_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} X_{\frac{\partial g}{\partial x_j}} + \sum_{i,j} \pi_{ij} \frac{\partial g}{\partial x_j} X_{\frac{\partial f}{\partial x_i}} \\ &= \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} X_{\pi_{ij}} + \sum_{i,j,h,k} \pi_{ij} \pi_{hk} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial^2 g}{\partial x_h x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} \\ &\quad - \sum_{i,j,h,k} \pi_{ij} \pi_{hk} \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} \qquad (**) \end{aligned}$$

(abbiamo usato anche l'antisimmetricità di π_{ij} e la (Lie) nella forma $X_{\pi_{ij}} = [X_{x_i}, X_{x_j}]$). Ora scriviamo il commutatore dei campi hamiltoniani relativi a f e g e, per mezzo di cambiamenti di indici e dell'antisimmetricità, trasformiamolo nell'ultimo termine dell'espressione precedente:

$$\begin{aligned} [X_f, X_g] &= X_f \left(\sum_{h,j} \pi_{hj} \frac{\partial g}{\partial x_h} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - X_g \left(\sum_{h,j} \pi_{hj} \frac{\partial f}{\partial x_h} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_{k,i} \pi_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{h,j} \pi_{hj} \frac{\partial g}{\partial x_h} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - \sum_{k,i} \pi_{ki} \frac{\partial g}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{h,j} \pi_{hj} \frac{\partial f}{\partial x_h} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k,i,h,j} \pi_{ki}\frac{\partial f}{\partial x_k}\pi_{hj}\frac{\partial g}{\partial x_h}\frac{\partial}{\partial x_i x_j} + \sum_{k,i,h,j}\pi_{ki}\frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\pi_{hj}\frac{\partial g}{\partial x_h}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}+ \\
&\qquad - \sum_{h,j,k,i}\pi_{hj}\frac{\partial g}{\partial x_h}\pi_{ki}\frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_j x_i} - \sum_{k,i,h,j}\pi_{ki}\frac{\partial g}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\pi_{hj}\frac{\partial f}{\partial x_h}\right)\frac{\partial}{\partial x_j} \\
&= \sum_{k,i,h,j}\pi_{ki}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial g}{\partial x_h}\frac{\partial \pi_{hj}}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_k}\pi_{hj}\frac{\partial g}{\partial x_i x_h} - \frac{\partial g}{\partial x_k}\frac{\partial f}{\partial x_h}\frac{\partial \pi_{hj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial x_k}\pi_{hj}\frac{\partial f}{\partial x_i x_h}\right)\frac{\partial}{\partial x_j} \\
&= \sum_{i,j}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}X_{\pi_{ij}} + \sum_{i,j,h,k}\pi_{ki}\pi_{hj}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial g}{\partial x_i x_h} - \frac{\partial g}{\partial x_k}\frac{\partial f}{\partial x_i x_h}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}
\end{aligned}
$$

Quest'ultima espressione, a meno di un cambiamento di indici, coincide con l'ultimo termine della (**).

QED

L'esempio più semplice di tensore di Poisson è quello di un tensore costante: supponiamo cioè che la matrice $\pi = ((\pi_{ij}))$ sia una matrice antisimmetrica costante; allora la condizione (Lie) del teorema precedente svanisce identicamente, e quindi è banalmente verificata.

Dunque ogni matrice antisimmetrica definisce una struttura di Poisson in $\mathbb{R}^n$, le cui parentesi sono costanti: una tale matrice ammette una forma canonica come

$$
\pi = \begin{pmatrix} 0 & I_r & 0 \\ -I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

ove I_r è la matrice identità $r \times r$. Questo vuol dire che lo spazio $\mathbb{R}^n$ si spezza come $\mathbb{R}^n = S \times N$ ove S è uno spazio vettoriale simplettico di dimensione $2r$ con la struttura simplettica canonica e N è uno spazio vettoriale di dimensione $n - 2r$ sul quale la struttura di Poisson è nulla. Le parentesi di Poisson sono ovviamente

$$
\{f, g\}(q, p, z) = \sum_{i=1}^{r}\left(\frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial g}{\partial p_1} - \frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}\right)
$$

ove (p, q) sono coordinate in S e z in N. Le funzioni di Casimir sono chiaramente quelle che dipendono solo dalle variabili z, quindi la struttura è simplettica solo se $2r = n$. Si noti che in questo caso il tensore di Poisson ha rango costante pari a $2r$.

Naturalmente questo è il caso più semplice: in realtà le funzioni $\pi_{ij} = \{x_i, x_j\}$ possono essere funzioni differenziabili qualsiasi, e questo rende la classificazione delle strutture di Poisson in $\mathbb{R}^n$ equivalente al problema della classificazione dei germi di funzioni differenziabili. Comunque, da Newton in poi, la prima reazione di fronte ad un problema non lineare è quella di linearizzarlo: nel nostro caso questo conduce naturalmente allo studio delle strutture di Poisson in $\mathbb{R}^n$ tali che le funzioni π_{ij} siano lineari (anche questa discussione si ritrova nell'opera di Lie in [65]; cfr. anche [11, §38]); supponiamo cioè che gli elementi della matrice π siano funzioni della forma

$$\pi_{ij}(x_1, ..., x_n) = \sum_i a_{ij}^k x_k$$

Si nota immediatamente che i numeri $((a_{ij}^k))$ non sono le componenti di alcun tensore; tuttavia determinano completamente la struttura di Poisson, e notiamo che la (Lie) del teorema di Lie diviene:

$$0 = \sum_l \left(\pi_{li} \frac{\partial \pi_{jk}}{\partial x_l} + \pi_{lj} \frac{\partial \pi_{ki}}{\partial x_l} + \pi_{lk} \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_l} \right) = \sum_r \sum_l (a_{li}^r a_{jk}^l + a_{lj}^r a_{ki}^l + a_{lk}^r a_{ij}^l) x_r$$

cioè (per $x_i = \delta_{ij}$ con $j = 1, ..., n$):

$$\sum_l (a_{li}^r a_{jk}^l + a_{lj}^r a_{ki}^l + a_{lk}^r a_{ij}^l) = 0$$

Queste sono esattamente le equazioni che caratterizzano le costanti di struttura di un'algebra di Lie in coordinate (cfr. [83, §52]), il che vuol dire che, se $(e_1, ..., e_n)$ è la base di $\mathbb{R}^n$ relativa alle coordinate $(x_1, ..., x_n)$ allora

$$[e_i, e_j] = \sum_k a_{ij}^k e_k$$

definisce una struttura di algebra di Lie su $\mathbb{R}^n$, che pensiamo come la "linearizzazione della struttura di Poisson.

Viceversa, se $[\,]$ sono parentesi di Lie su $\mathbb{R}^n$ allora possiamo definire delle parentesi di Poisson su $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Stavolta procediamo in modo intrinseco: supponiamo cioè di avere un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di dimensione n e consideriamo il suo spazio vettoriale duale $V = \mathfrak{g}^*$; fissando delle coordinate lo possiamo identificare con la nostra varietà $\mathbb{R}^n$. Ora consideriamo due funzioni $f, g \in C^\infty(V)$ e, in un punto $v \in V$, i loro differenziali che, potendo identificare $T_v V$ con V stesso per mezzo di una traslazione, possiamo considerare come funzionali lineari: $(df)_x, (dg)_x \in V^*$. Ma $V^* = \mathfrak{g}^{**} \cong \mathfrak{g}$ in modo canonico, dunque i differenziali $(df)_x$ e $(dg)_x$ sono elementi dell'algebra di Lie e possiamo considerarne il commutatore, che è ancora un elemento di $\mathfrak{g}$ e calcolarvi il funzionale lineare $v \in V = \mathfrak{g}^*$: questo numero è per definizione il valore della funzione $\{f, g\}$ nel punto v

$$\{f, g\}(v) := v([(df)_v, (dg)_v])$$

Che queste parentesi siano bilineari, antisimmetriche e soddisfino all'identità di Jacobi segue dalle analoghe proprietà delle parentesi di Lie su $\mathfrak{g}$ in termini delle quali sono definite. L'identità di Leibniz pure segue con facilità dalla regola di differenziazione delle funzioni composte:

$$\begin{aligned}\{fg,h\}(v) &= v([(df)_v g(v),(dh)_v]) + v([(dg)_v f(v),(dh)_v]) \\ &= g(v)v([(df)_v,(dh)_v]) + f(v)v([(dg)_v,(dh)_v]) \\ &= (g\{f,h\} + f\{g,h\})(v)\end{aligned}$$

Mostriamo infine che questa costruzione è l'inversa di quella data in precedenza. Fissiamo cioè una base $(e_1,...,e_n)$ e scriviamo le costanti di struttura della nostra algebra di Lie

$$[e_i,e_j] = \sum_k c_{ij}^k e_k$$

Allora, se $(x_1,...,x_n)$ sono le coordinate associate alla base scelta, abbiamo che

$$\begin{aligned}\{f,g\}(v) &= v([\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(v)e_i, \sum_j \frac{\partial g}{\partial x_j}(v)e_j]) = \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_i}(v)\frac{\partial g}{\partial x_j}(v)v([e_i,e_j]) \\ &= \sum_{i,j,k} \frac{\partial f}{\partial x_i}(v)\frac{\partial g}{\partial x_j}(v)v(c_{ij}^k e_k) = \sum_{i,j,k} c_{ij}^k v_k \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}\end{aligned}$$

se $v = \sum_i v_i e^i$ essendo $(e^1,...,e^n)$ la base duale di quella fissata su $\mathfrak{g}$.

Possiamo riassumere questa discussione nel seguente

Teorema 1.2.4 *Le strutture di Poisson lineari su uno spazio vettoriale V di dimensione finita sono in corrispondenza biunivoca con le strutture di algebre di Lie su V.*

Già nel caso lineare si manifesta quindi una varietà di esempi di strutture di Poisson locali che rende la teoria assai difforme da quella simplettica. Le parentesi indotte da un'algebra di Lie nel modo appena spiegato si chiamano *parentesi di Lie–Poisson*, perché introdotte da Lie[4].

Definizione 1.2.5 *Una varietà di Poisson che sia diffeomorfa al duale $\mathfrak{g}^*$ di un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ con le parentesi di Lie–Poisson si dice* varietà di Lie–Poisson.

[4] Il lavoro di Lie su queste parentesi fu sostanzialmente dimenticato, e, quando negli anni '60 furono riscoperte da Berezin [7], Kirillov [50], Konstant [55] e Souriau [96], per un certo periodo portarono i loro nomi finché non ci si accorse che la loro teoria era già stata sviluppata in [65, p.294 sgg.].

Un esempio importante di varietà di Lie–Poisson è lo spazio $\mathfrak{so}(3)^*$, la cui struttura di Poisson interviene nella teoria dei corpi rigidi sviluppata da Eulero (cfr. [1] e [73]); in questo caso, dato che la parentesi di Lie dell'algebra si può identificare col prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$, le parentesi di Poisson si scrivono come

$$\{f, g\}(x) = x \cdot \nabla f \wedge \nabla g$$

(prodotto misto in $\mathbb{R}^3$) ove ∇f è il gradiente di f. La formula dei campi hamiltoniani rispetto a questa struttura di Poisson figura nella *Mécanique* di Lagrange (cfr.[61, Vol.II, p.212], formula (A)).

Identifichiamo i campi hamiltoniani di $\mathfrak{g}^*$: ad ogni campo hamiltoniano X_f possiamo associare, in un punto $x \in \mathfrak{g}^*$, una derivazione interna dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$, e precisamente $ad_{(df)_x}$; abbiamo cioè una funzione

$$\mathrm{Ham}(C^\infty(\mathfrak{g}^*)) \longrightarrow \mathrm{im}\, ad \subset \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$$

$\mathbb{R}$-lineare; si tratta ovviamente di un monomorfismo di algebre di Lie, quindi i campi hamiltoniani corrispondono alle derivazioni interne di $\mathfrak{g}$. I campi canonici corrispondono invece, per definizione, esattamente a tutte le derivazioni dell'algebra di Lie. Quindi

$$\mathrm{Can}(C^\infty(\mathfrak{g}^*)) / \mathrm{Ham}(C^\infty(\mathfrak{g}^*)) \cong \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) / \mathrm{im}\, ad = H^1(\mathfrak{g})$$

è il primo gruppo di coomologia di Chevalley–Eilenberg dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ a coefficienti nella rappresentazione banale (cfr. [19, §13-2], [41, §1.4]).

Notiamo che se π è il tensore di Poisson di una varietà di Lie–Poisson allora *non può avere rango costante a meno che le parentesi di Poisson non siano identicamente nulle*. Infatti nell'origine $0 \in \mathfrak{g}^*$ le parentesi si annullano identicamente per linearità delle componenti del tensore π:

$$\forall f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*) \quad \{f, g\}(0) = 0$$

e quindi in 0 il tensore ha rango nullo. Dunque, già nel caso lineare, si manifesta per le varietà di Poisson un fenomeno che non ha analoghi nella geometria delle G-strutture, ad esempio ($G = Sp(n)$) per le strutture simplettiche, vale a dire la non regolarità del tensore che definisce la struttura geometrica stessa.

Definizione 1.2.6 *Il* rango *di una struttura di Poisson su una varietà M in un punto $x \in M$ è il rango del tensore di Poisson nel punto x.*

Il rango definisce una funzione

$$\mathrm{rango} : M \longrightarrow \mathbb{N}$$

che è semicontinua inferiormente: infatti il rango di un tensore non può decrescere nell'intorno di un punto. I punti di continuità del rango si dicono *punti regolari* della varietà di Poisson e formano un aperto (il che è ovvio) denso: infatti intorno ad ogni punto x la funzione rango ha un massimo locale, poiché il rango è limitato (essendo la varietà di dimensione finita), e quindi intorno al punto di massimo rango è continua.

Definizione 1.2.7 *Una varietà di Poisson è* regolare *se ogni suo punto è regolare.*

Questo equivale all'essere il rango una funzione localmente costante. Evidentemente una varietà simplettica è regolare di rango massimo in ciascun punto (il rango è ovviamente sempre un intero pari, dato che è il rango di un tensore antisimmetrico); un altro esempio è il prodotto $S \times N$ di una varietà simplettica con una varietà N con tensore di Poisson $\pi = \pi_S + 0_N$ ove π_S è il tensore di Poisson su S. Il rango è in questo caso la costante dim S.

Le varietà di Lie–Poisson forniscono esempi di varietà non regolari: il punto origine ha sempre rango nullo, così se la struttura di Poisson non è nulla non può avere rango costante.

Non esiste, per strutture di Poisson non lineari in $\mathbb{R}^n$, una parametrizzazione soddisfacente come per quelle lineari; un programma di classificazione dovrebbe per prima cosa distinguere la classe di funzioni permesse come elementi del tensore di Poisson: ad esempio si potrebbe decidere di limitarsi a funzioni polinomiali, ovvero a funzioni analitiche. Comunque in letteratura non è presente nessun tentativo, se non parziale, di affrontare questa questione. Diamo tuttavia, nello spirito di questa esposizione, alcuni esempi che ci sembrano interessanti.

Consideriamo il caso di dimensione più bassa, cioè $n = 2$. Si tratta quindi di studiare strutture di Poisson in $\mathbb{R}^2$: una parentesi di Poisson è ovviamente del tipo

$$\{f, g\} = \pi\{f, g\}_S$$

ove $\pi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e $\{\,\}_S$ denota le usuali parentesi simplettiche

$$\{f, g\}_S(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}$$

Il rango del tensore di Poisson $\begin{pmatrix} 0 & \pi \\ -\pi & 0 \end{pmatrix}$ è ovviamente 0 o 2 secondo che π si annulli o meno nel punto ove si calcola il rango.

La condizione di integrabilità di Lie svanisce identicamente in dimensione due e, se (x, y) sono coordinate nel piano, $\pi(x, y) = \{x, y\}$. Questo significa che esistono tante strutture di Poisson quante sono le funzioni (o meglio i germi di funzioni) nel piano. Evidentemente la struttura simplettica corrisponde ad una qualsiasi funzione π costante, e si denota semplicemente con $\{f, g\}$. Il piano dotato della struttura di Poisson associata alla funzione π verrà qui denotato con $\mathbb{R}^2_\pi$.

Dunque, in un certo senso, le strutture di Poisson nel piano sono parametrizzate dalle funzioni C^∞, il che rende l'idea di quanto complicate possano essere queste strutture. In realtà, a meno di cambiamenti di coordinate, quello che interessa è il germe della funzione più che la funzione stessa, e in effetti i risultati di classificazione per queste strutture nel piano (sostanzialmente dovuti a V.I. Arnol'd [5], che vi era stato condotto dalle sue famose ricerche sui *denominatori piccoli* in Meccanica Celeste) si inquadrano nella teoria delle singolarità delle applicazioni differenziabili.

Il caso più semplice è quello delle strutture lineari, vale a dire tali che π sia una funzione lineare omogenea $\pi(x, y) = ax + by$; ci si può sempre ridurre al caso $\pi(x, y) = y$ con un diffeomorfismo del piano che preserva la struttura di Poisson, quindi abbiamo essenzialmente una struttura di Poisson lineare non nulla nel piano.

Esiste una classificazione completa anche delle strutture di Poisson quadratiche nel piano, cioè quelle corrisponenti a funzioni $\pi(x, y)$ che siano polinomi omogenei di grado due (cfr. [8], [37], [67]):

Teorema 1.2.8 *Le strutture di Poisson quadratiche su $\mathbb{R}^2$ corrispondono, a meno di diffeomorfismi di Poisson, alle seguenti funzioni:*

(1) $\pi(x, y) = 0$.

(2) $\pi(x, y) = a(x^2 + y^2)$ *con* $a \neq 0$.

(3) $\pi(x, y) = axy$ *con* $a \neq 0$.

(4) $\pi(x, y) = y^2$.

Ad esempio consideriamo $\pi(x, y) = x^2 + y^2$: la struttura di Poisson corrispondente ha rango nullo nell'origine e rango due in ogni altro punto: si tratta quindi di una "struttura simplettica con una singolarità isolata, che tuttavia, pur nella sua semplicità, presenta aspetti interessanti: solitamente si denota $\mathbb{R}^2_0$ il piano di Poisson con queste parentesi.

1.3 Struttura di una varietà di Poisson

Esistono due teoremi fondamentali sulla struttura delle varietà di Poisson: il primo, dovuto a Weinstein [104], generalizza il teorema di Darboux alle varietà di Poisson qualsiasi. Per enunciarlo necessitiamo di alcuni preliminari.

Definizione 1.3.1 *Se* $(M, \{\,\}_M)$ *e* $(N, \{\,\}_N)$ *sono varietà di Poisson il loro* prodotto di Poisson *è la varietà* $M \times N$ *con la parentesi di Poisson* $\{\,\}_{M\times N}$ *il cui tensore di Poisson* $\pi_{M\times N}$ *è la somma diretta dei tensori di Poisson* $\pi_M \oplus \pi_N$ *dei due fattori.*

Ad esempio, localmente troviamo che il tensore di Poisson su $M \times N$ corrisponde alla matrice a blocchi $\begin{pmatrix} \pi_M & 0 \\ 0 & \pi_N \end{pmatrix}$ ove π_M e π_N sono le matrici che, nelle coordinate scelte, rappresentano i tensori di Poisson di M e N.

Si noti inoltre che se $p_M : M \times N \longrightarrow M$ (rispettivamente $p_N : M \times N \longrightarrow N$) è la proiezione sul primo (rispettivamente sul secondo) fattore del prodotto allora per ogni $f \in C^\infty(M)$ e per ogni $g \in C^\infty(N)$ si ha

$$\{p_1^* f, p_2^* g\}_{M\times N} = 0$$

Possiamo finalmente enunciare il teorema di spezzamento di Weinstein (per la cui dimostrazione si rimanda a [104], [63] o [102]).

Teorema di Spezzamento (WEINSTEIN) **1.3.2** *Se* M *è una varietà di Poisson e* $x \in M$ *allora esiste intorno a* x *una carta locale* U *isomorfa ad un prodotto* $S \times N$ *in modo che le parentesi di Poisson di* M *indotte su* $U \cong S \times N$ *rendano* S *una varietà simplettica e* N *una varietà di Poisson il cui rango del tensore di Poisson nel punto* $p_N(x)$ *(ove* $p_N : U \longrightarrow N$ *è la proiezione sul secondo fattore) sia nullo. Questa fattorizzazione è unica a meno di isomorfismi di Poisson locali.*

Notiamo che, se il punto x è regolare allora il rango del tensore di Poisson è costante intorno a x, sicché le parentesi di Poisson sul fattore N sono identicamente nulle. In altri termini possiamo trovare delle coordinate $(q_1, ..., q_r, p_1, ..., p_r, z_1, ..., z_{n-2r})$ (ove $2r$ è il rango nel punto x) in modo che, in U:

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = \{z_i, f\} = 0 \qquad \text{e} \qquad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$$

per ogni funzione $f \in C^\infty(U)$. Nel caso generale non possiamo dire nulla se non che queste relazioni valgono nel punto x: è questo il caso, ad esempio, di una qualsiasi struttura di Lie–Poisson nel punto $x = 0$, ove il tensore di Poisson si annulla identicamente, sicché intorno a quel punto il teorema di spezzamento non ci dice praticamente nulla se non che esistono solo le coordinate $(z_1, ..., z_n)$ centrate in $x = 0$.

Si noti, all'estremo opposto, che se M è simplettica il teorema si spezzamento degenera nel teorema di Darboux: il fattore N non esiste e $U = S$ è esattamente la carta locale con le coordinate canoniche nelle quali il tensore di Poisson è costante.

Definizione 1.3.3 *Una carta locale $U = S \times N$ che soddisfi la tesi del teorema di spezzamento si dice* intorno di Darboux–Weinstein *del punto x.*

Il teorema di Spezzamento di Weinstein stabilisce espressamente che la struttura simplettica locale è unica, cioè nelle coordinate fornite dal teorema si scrive sempre in forma canonica, mentre sulla *struttura trasversale*, cioè quella del fattore N nella decomposizione locale $U = S \times N$, non si può dire, nel caso generale, altro se non che si annulla identicamente nel punto $p_N(x)$; il teorema sancisce che queste strutture trasversali sono tutte isomorfe, sicché si può parlare solo di un germe di struttura trasversale canonicamente associato al punto x dalla struttura di Poisson. Un problema assai interesante (e arduo) è quello della linearizzazione di queste strutture trasversali: consideriamo una varietà di Poisson M, un suo punto $x_0 \in M$ e un intorno di Darboux–Weinstein $U \ni x_0$; allora il tensore di Poisson in U si scrive come

$$\pi(q,p,z) = \sum_i \frac{\partial}{\partial q_i} \wedge \frac{\partial}{\partial p_i} + \sum_{i,j} \nu_{ij} \frac{\partial}{\partial z_i} \wedge \frac{\partial}{\partial z_j}$$

ove ν_{ij} sono le componenti del tensore di Poisson su N, che verificano le $\nu_{ij}(x_0) = 0$. Possiamo allora considerarne gli sviluppi di MacLaurin al primo ordine intorno a x_0:

$$\nu_{ij}(x) = \sum_k c_{ij}^k z_k + O(|z|^2)$$

Se scriviamo la condizione di integrabilità di Lie per il tensore di Poisson ν e trascuriamo i termini di ordine superiore al primo otteniamo

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_l \left(\nu_{li} \frac{\partial \nu_{jk}}{\partial z_l} + \nu_{lj} \frac{\partial \nu_{ki}}{\partial z_l} + \nu_{lk} \frac{\partial \nu_{ij}}{\partial z_l} \right) \\ &= \sum_l \left(\sum_r c_{li}^r c_{jk}^l z_r + \sum_r c_{lj}^r c_{ki}^l z_r + \sum_r c_{lk}^r c_{ij}^l z_r \right) \\ &= \sum_r \left(\sum_l c_{li}^r c_{jk}^l + \sum_r c_{lj}^r c_{ki}^l + \sum_r c_{lk}^r c_{ij}^l \right) z_r \end{aligned}$$

sicché le c_{ij}^k sono costanti di struttura per un'algebra di Lie e quindi la linearizzazione del tensore ν fornisce una struttura di Lie–Poisson su N.

Abbiamo cioè associato ad ogni punto $x_0 \in M$ un'algebra di Lie $\mathfrak{g}(x_0)$: questa algebra di Lie dipende in realtà solo dalla foglia passante per x_0 e non dal singolo punto. In effetti consideriamo la foglia $S \ni x_0$ per x_0 e il suo spazio tangente $T_{x_0}S_{x_0} \subset T_{x_0}M$; il quoziente $N_{x_0}S_{x_0} = T_{x_0}M/T_{x_0}S_{x_0}$ è lo *spazio normale alla foglia* in x_0, e il suo spazio duale $(N_{x_0}S_{x_0})^*$ si può identificare allo spazio dei covettori che si annullano su $T_{x_0}S_{x_0}$:

$$(N_{x_0}S_{x_0})^* \cong \mathrm{Ann}(T_{x_0}S_{x_0})$$

Ora, per ogni $\alpha, \beta \in \mathrm{Ann}(T_{x_0}S_{x_0})$ possiamo scegliere due funzioni $f, g \in C^\infty(M)$ tali che $(df)_{x_0} = \alpha$ e $(dg)_{x_0} = \beta$; poiché $\alpha, \beta \in (N_{x_0}S_{x_0})^*$ possiamo scegliere f e g come funzioni che si annullino sulla foglia S_{x_0}: allora è ben definita l'operazione bilineare

$$\{\alpha, \beta\} = (d\{f, g\})_{x_0}$$

che rende $\mathrm{Ann}(T_{x_0}S_{x_0})$ un'algebra di Lie intrinsecamente associata alla foglia (per i dettagli cfr. [49, §1]): si tratta esattamente della struttura data, in coordinate, dalle costanti di struttura $\{c_{ij}^k\}$ precedentemente definite.

Sorge spontanea la domanda se sia possibile trovare un isomorfismo locale che trasformi ν nel suo linearizzato, cioè se sia sempre possibile linearizzare un tensore di Poisson localmente. La risposta è negativa e la questione è assai difficile: si tratta sostanzialmente di un problema di Analisi, anche se ammette una formulazione in termini di algebre di Lie; è stato posto da Weinstein [104], e affrontato con risultati interessanti da Conn (cfr. [21], [22]), dallo stesso Weinstein [107] e da Dufour [36].

Il secondo risultato fondamentale sulla struttura delle varietà di Poisson è il teorema di decomposizione simplettica dovuto a Lie e Kirillov. L'esempio guida è quello delle varietà di Lie–Poisson: sia $\mathfrak{g}^*$ una tale varietà; come spazio vettoriale possiamo considerare $\mathfrak{g}^*$ una rappresentazione dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$, precisamente la rappresentazione coaggiunta. Poiché non si tratta di un'azione transitiva (ad esempio $\{0\}$ è una singola orbita!) lo spazio $\mathfrak{g}^*$ si decompone nelle orbite di questa azione. Ciascuna orbita è una sottovarietà (non necessariamente con la topologia indotta: cfr. e.g. [51, p.293]) e la restrizione del tensore di Poisson ad essa la rende una varietà di Poisson: Lie nel XIX secolo e Kirillov nel XX[5] hanno dimostrato il seguente notevole teorema (cfr. [50] e [65, Cap.19, particolarmente p.349 e l'osservazione a p.347])

Teorema (LIE–KIRILLOV) **1.3.4** *Le orbite dell'azione coaggiunta sono varietà simplettiche rispetto alla restrizione della struttura di Lie–Poisson.*

Questo teorema è la base per l'introduzione della Geometria Simplettica in Teoria delle Rappresentazioni, secondo quella collezione di metodi che va comunemente sotto il nome di Teoria delle Orbite (cfr. [51]); per una discussione

[5]Per quanto possa sembrare assurdo il lavoro di Lie sulle strutture di Poisson è rimasto inesplorato per quasi un secolo, nascosto nelle pagine del monumentale ma labirintico trattato tripartito *Theorie der Trasformationsgruppen*.

completa di questo teorema nell'ambito della Geometria di Poisson e della Meccanica Analitica si veda [73, §14.4]; gli aspetti legati alla quantizzazione geometrica sono magistralmente esposti in [55] e [96].

Non solo una varietà di Lie–Poisson si decompone in sottovarietà simplettiche: anche la struttura di Poisson costante di rango $2r$ su $\mathbb{R}^n$ ammette una tale decomposizione:

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{x\in\mathbb{R}^{2r-n}} \mathbb{R}^{2r} \times \{x\}$$

in piani paralleli ciascuno dei quali è simplettico.

Questo fenomeno è in realtà dovuto alla sola presenza della struttura di Poisson e si verifica in generale: se M è una varietà di Poisson possiamo sempre decomporla in "orbite simplettiche nel modo seguente.

Definizione 1.3.5 *Se M è una varietà di Poisson e $x \in M$ la* foglia simplettica *per x è l'insieme S_x dei punti $y \in M$ che possono essere congiunti a x da una curva differenziabile a tratti il cui campo tangente in ciascun tratto differenziabile sia hamiltoniano.*

Evidentemente le foglie simplettiche di una varietà di Poisson sono le classi di equivalenza della relazione che intercorre fra x e y se possono essere congiunti da una curva hamiltoniana a tratti, quindi danno una decomposizione in parti disgiunte della varietà. Una foglia simplettica è un esempio di sottovarietà di Poisson:

Definizione 1.3.6 *Se M è una varietà di Poisson una* sottovarietà di Poisson *è una sottovarietà (non necessariamente con la topologia indotta) $N \subset M$ tale che l'inclusione $N \hookrightarrow M$ sia una mappa di Poisson.*

Per il seguente fondamentale teorema si veda [63], [73] o [102]:

Teorema di Stratificazione Simplettica (LIE–KIRILLOV) **1.3.7** *Se M è una varietà di Poisson allora si decompone in unione disgiunta delle sue foglie simplettiche S_x; ciascuna foglia è una sottovarietà di Poisson (non necessariamente con la topologia indotta) e la struttura di Poisson di M ristretta a ciascuna foglia la rende simplettica di dimensione pari al rango di un qualsiasi punto passante per essa.*

Il teorema si deve nella sua generalità a Kirillov, mentre per strutture di Poisson il cui tensore abbia rango costante è dovuto essenzialmente a Lie. Si tratta di una profondissima generalizzazione della decomposizione della rappresentazione coaggiunta di un'algebra di Lie nelle sue orbite simplettiche:

suggestivamente possiamo pensare alle foglie simplettiche di una varietà di Poisson come a “orbite coaggiunte generalizzate.

Se consideriamo il caso di una varietà di Poisson regolare questo teorema è un corollario del teorema di Frobenius: in effetti poiché il rango del tensore π è costante la mappa hamiltoniana $\pi^\# : T^*M \longrightarrow TM$ è una mappa di fibrati, dunque la sua immagine $\operatorname{im}\pi^\#$ è un sottofibrato $H \subset TM$, involutivo, dato che le sue sezioni sono il $C^\infty(M)$-modulo generato dai campi hamiltoniani, sicché se $X, Y \in \Gamma(H)$ allora anche $[X, Y] \in \Gamma(H)$, e quindi, per il teorema di Frobenius, esiste una fogliazione integrale massimale per questo fibrato. Ciascuna foglia è esattamente una foglia simplettica nel senso della definizione precedente.

Si noti dunque che una qualsiasi fogliazione di una varietà le cui foglie siano simplettiche dà luogo ad una varietà di Poisson se le strutture simplettiche variano in modo differenziabile. Ad esempio consideriamo il toro tridimensionale visto come quoziente dello spazio per un suo reticolo:

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$$

Su $\mathbb{R}^3$ possiamo considerare una struttura di Poisson regolare ottenuta come segue: nelle coordinate cartesiane (x, y, z) consideriamo il fascio di piani p_φ contenenti la retta $\{y = z = 0\}$ e parametrizzati dall'angolo φ che formano con il piano $\{z = 0\}$; ciascuno di essi è una varietà simplettica in modo naturale (scegliendo come forma simplettica l'elemento d'area) rispetto ad una certa forma ω_φ, che induce una forma chiusa su $\mathbb{R}^3$ per *pull-back* rispetto alla proiezione ortogonale sul piano p_φ; denotiamo con $\mathbb{T}^3_\varphi$ la varietà di Poisson così ottenuta. Possiamo allora passare al quoziente il piano p_φ ottenendo una superficie in $\mathbb{T}^3$ la cui natura varia secondo che $\varphi \in \mathbb{Q}$ o meno.

Se $\varphi \in \mathbb{Q}$ allora l'immagine di p_φ è un toro bidimensionale immerso in $\mathbb{T}^3_\varphi$ con la topologia indotta come sottoinsieme compatto, e lo stesso vale per tutti i suoi piani paralleli passati al quoziente: questo induce una fogliazione simplettica su $\mathbb{T}^3_\varphi$ che in questo modo diviene una varietà di Poisson regolare con foglie diffeomorfe a $\mathbb{T}^2$. Se invece $\varphi \notin \mathbb{Q}$ allora il piano p_φ al quoziente diviene una superficie ergodica, densa in $\mathbb{T}^3_\varphi$ e diffeomorfa ad un cilindro $\mathbb{R} \times S^1$, e lo stesso vale per tutti i suoi piani paralleli passati al quoziente: questo induce una fogliazione simplettica su $\mathbb{T}^3_\varphi$ che in questo modo diviene una varietà di Poisson regolare con foglie dense diffeomorfe a cilindri. In ambedue i casi otteniamo una struttura di Poisson regolare.

Nel caso generale non siamo in presenza di una distribuzione nel senso classico del termine, ma piuttosto di una *distribuzione singolare*, un fenomeno tipico in Teoria dei Controlli. Esistono generalizzazioni del teorema di Frobenius a questo caso con singolarità dovute a Stefan, Sussmann e Viflyantsev (cfr. [98], [99], [103]) che in genere sono utilizzate per dimostrare il teorema precedente: comunque è anche possibile dimostrarlo direttamente (cfr. [73]).

Arricchiamo il nostro bagaglio di esempi di varietà di Poisson con un'altra classica costruzione dovuta a Dirac (cfr. [31], [32]): qui la introdurremo in uno spirito più geometrico, seguendo [95], [64] e [102].

Definizione 1.3.8 *Una* varietà quasi-simplettica *è una varietà Q dotata di una 2-forma ω non degenere.*

La nostra discussione del teorema di Pauli–Jost implica che per ogni varietà quasi-simplettica possiamo definire campi hamiltoniani e parentesi di Poisson che non soddisferanno più, tuttavia, all'identità di Jacobi. Una varietà quasi-simplettica non dà luogo in alcun modo naturale ad una varietà di Poisson a meno che non si faccia intervenire un'altra condizione: una possibilità è richiedere che la forma sia chiusa (ottenendo così il caso simplettico), l'altra è richiedere che M sia fogliata in varietà simplettiche le cui forme simplettiche siano i *pull-back* della forma ω su M: precisamente, supponiamo che sulla varietà quasi-simplettica (Q, ω) esista un sottofibrato $H \subset TM$ involutivo tale che le sue varietà integrali massimali (foglie), che si immergono in Q come $i_S : S \hookrightarrow Q$ siano simplettiche rispetto al *pull-back* $i_S^*\omega$.

Teorema (DIRAC) **1.3.9** *Se Q è una varietà quasi-simplettica rispetto ad una forma ω e se le foglie della fogliazione integrale di un sottofibrato H sono simplettiche rispetto ai pull-back della forma ω, per ogni $f, g \in Q$ possiamo definire:*

$$\{f, g\}_Q(x) = \{f|_{S_x}, g|_{S_x}\}_{S_x}(x)$$

ove S_x è la foglia per x e $\{\,\}_{S_x}$ le parentesi simplettiche su di essa. Le parentesi $\{\,\}_Q$ rendono Q una varietà di Poisson regolare.

Per i dettagli cfr. [64], [102]: qui ci limitiamo ad osservare che se $x \in S \subset Q$ è un punto di Q appartenente alla foglia S:

$$\{f, g\}_Q(x) = (i_S^*\omega)_x(X_{i^*fx}, X_{i^*gx})$$

il che mostra come le $\{\,\}_Q$ siano effettivamente parentesi di Poisson: l'unica difficolta è mostrare che questa definizione dà luogo ad una funzione differenziabile (stiamo incollando funzioni foglia per foglia) il che segue dalla regolarità e dalla differenziabilità della distribuzione. Ovviamente le foglie simplettiche di questa struttura di Poisson sono esattamente le foglie della distribuzione H, che coincide quindi con quella dei campi hamiltoniani.

Definizione 1.3.10 *Le parentesi* $\{\,\}_Q$ *sulla varietà quasi-complessa e fogliata simpletticamente* Q *si dicono* parentesi di Dirac*.*

Vaisman ha mostrato come ogni varietà di Poisson regolare si immerga in una struttura di Dirac (cfr. [102]). L'idea è molto semplice: se M è una varietà di Poisson regolare allora la distribuzione dei campi hamiltoniani definisce un sottofibrato $H \subset TM$; scelta una decomposizione

$$TM = H \oplus N$$

la varietà di Dirac richiesta sarà la base del fibrato duale N^*. Se (q, p, z) sono coordinate locali di Darboux–Weinstein su M allora la distribuzione è generata dai campi $\{\frac{\partial}{\partial q}, \frac{\partial}{\partial p}\}$ e quindi N ha come coordinate (q, p, z, ξ) ove ξ sono le coordinate nella base duale $dz_1, ..., dz_k$.

L'esempio più elementare di parentesi di Dirac si ottiene considerando la varietà simplettica $\mathbb{R}^{2n}$ rispetto alla struttura canonica e la fogliazione in piani che hanno equazioni

$$\begin{cases} q_i = c_i \\ p_i = d_i \end{cases}$$

$(i = 2, ..., n$ e c_i, d_i costanti).

In generale la distribuzione sarà definita da delle condizioni

$$\varphi(q, p) = 0$$

che rappresenteranno i *vincoli del sistema hamiltoniano* sulla varietà $\mathbb{R}^{2n}$ (cfr.[32, §1]).

Un esempio di origine non simplettica si ha considerando oggetti comunque imparentati con la varietà simplettiche e di grande interesse in Meccanica e Topologia: sia (C, ϑ) una varietà di contatto con forma di contatto ϑ; rammentiamo (cfr. [53, Vol.II], [96], [1], [5], [63]) che ciò vuol dire che C è una varietà di dimensione $2n+1$ con una 1-forma ϑ tale che $\vartheta \wedge d\vartheta^n$ sia una forma di volume (per essere precisi questa è una varietà di contatto esatta: cfr. [1, §5.1]). Possiamo definire, data C, una varietà quasi-simplettica $Q = C \times S^1$ la cui forma quasi-simplettica definiamo come

$$\omega = d\vartheta + \vartheta \wedge \lambda$$

se λ è la forma di volume (di lunghezza in questo caso!) su S^1.

Se su C consideriamo il campo vettoriale V determinato dalle

$$i_V \vartheta = 1 \qquad \text{e} \qquad i_V d\vartheta = 0$$

questo si solleva ad un campo vettoriale $\tilde{V}$ su Q, come pure ad un campo $\tilde{T}$ su Q si solleva il campo T tangente a S^1. Poiché questi campi sono sollevamenti di campi definiti su fattori diversi commutano: $[\tilde{V}, \tilde{T}] = 0$ e quindi la distribuzione H su Q il cui spazio in x è generato dai vettori $\tilde{V}_x$ e $\tilde{T}_x$ è involutiva, quindi integrabile. Si tratta di una distribuzione di piani, e, dato che

$$\omega(\tilde{T}, \tilde{V}) = \vartheta(V)\lambda(T) \neq 0$$

il *pull-back* di ω a ciascuna foglia definisce una forma non degenere: chiaramente questa forma è chiusa (perché è una 2-forma su una varietà bidimensionale), quindi è simplettica.

Si noti che se (M, ω) è una varietà simplettica e $S \subset M$ una sottovarietà tale che il *pull-back* di ω per tramite dell'inclusione la renda una varietà simplettica le parentesi di Dirac su M indotte da S non coincidono con le parentesi simplettiche su M: in effetti le parentesi di Dirac ignorano completamente la struttura trasversale di S in M. Per vederlo in modo concreto, consideriamo $x_0 \in S \subset M$ e fissiamo delle coordinate locali $(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)$ intorno ad esso in modo che, in queste coordinate, S abbia equazioni $\{q_{k+i} = p_{k+i} = 0\}_{i=1,...,n-k}$, $(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)$ siano coordinate canoniche su M intorno a x_0 e $(q_1, ..., q_k, p_1, ..., p_k)$ siano coordinate canoniche su S intorno a x_0. La matrice A le cui componenti sono le funzioni

$$i, j = 1, ..., n-k \qquad\qquad \{x_{k+i}, x_{k+j}\}$$

(ove $x_i = q_i$ ovvero $x_i 0 p_i$) è invertibile (perché le (q_i, p_j) sono coordinate canoniche) e quindi possiamo considerare la sua inversa A^{-1} che avrà delle componenti che denoteremo a_{ij}.

Vogliamo confrontare, su S, la struttura di Poisson su M data dalla sua forma simplettica e quella data dalle parentesi di Dirac: per farlo decomponiamo lo spazio $T_{x_0}M$ in somma diretta

$$T_{x_0}M = T_{x_0}S \oplus (T_{x_0}M)^{\perp}$$

ove l'ortogonale è preso rispetto alla forma ω. Allora esiste un operatore di proiezione $p_{x_0} : T_{x_0}M \longrightarrow T_{x_0}S$ che ci permette di esprimere il legame fra le parentesi simplettiche e quelle di Dirac su M come

$$X_f^{Dirac}(x) = p_x \circ X_f^{Simpl}(x)$$

ove X_f^{xxx} è il campo hamiltoniano associato alla struttura di Poisson xxx. Ovviamente $p_x \circ X_f(x)$ non è semplicemente $X_f(x)$ e quindi esiste un termine "trasversale per il quale le parentesi di Dirac differiscono da quelle simplettiche.

Si può esplicitamente scrivere questo termine, nelle coordinate locali fissate precedentemente intorno a x_0, usando la notazione

$$(x_1, ..., x_{2n}) = (q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)$$

come

$$X_f^{Simpl}(x) - X_f^{Dirac}(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) X_{x_{k+i}}^{Simpl}(f) X_{x_{k+j}}^{Simpl}(x)$$

Per i dettagli cfr. [95] o [73, §8].

Le strutture di Poisson regolari, come si è visto, sono strettamente imparentate con quelle simplettiche: *a priori* è facile definire una struttura di Poisson su una varietà semplicemente incollando strutture locali che siano regolari, ma non è detto che l'incollamento produca strutture di Poisson globalmente regolari, né che ogni varietà, quindi, ne possegga.

Ad esempio se consideriamo la sfera S^4 a quattro dimensioni, vediamo immediatamente che non possiede strutture di Poisson regolari non nulle: infatti non possiede strutture simplettiche[6], e quindi una struttura regolare non nulla non può che avere rango due; supponiamo che esista, cioè che ci sia una distribuzione involutiva con foglie simplettiche $H \subset TS^4$; allora considerando la mappa $\pi^\# : T^*S^4 \longrightarrow TS^4$ indotta dalla struttura di Poisson (che è una mappa di fibrati perché la struttura è regolare) abbiamo che la sua immagine è un sottofibrato H di TS^4, che risulta così una somma di Withney:

$$TS^4 = H \oplus N$$

Notiamo che $H \cong N$ (ad esempio fissando una metrica) e quindi possiamo definire un operatore $J : TS^4 \longrightarrow TS^4$ come

$$J(X_H \oplus X_N) = X_N \oplus -X_H$$

Ovviamente $J^2 = -Id$, e in questo modo avremmo una struttura quasi-complessa J su S^4, mentre solo per $n = 2, 6$ la sfera S^n possiede strutture quasi-complesse (cfr. [97, §41]). Questo assurdo è nato dall'aver supposto esistente una struttura di Poisson regolare di rango due su S^4.

Accenniamo a due altre classi di esempi di varietà di Poisson che corrispondono in realtà ad operazioni nella categoria di Poisson: cominciamo con una nozione dovuta a Weinstein [104].

[6] Una forma simplettica ω su S^4 dovrebbe in particolare essere chiusa, quindi darebbe luogo a una classe di coomologia in $H^2(S^4)$ che è nullo; dunque la forma simplettica dovrebbe essere esatta e, dato che la varietà è compatta e non ha bordo, per il teorema di Stokes avremmo $\int_{S^4} \omega \wedge \omega = 0$, il che mostra che ω non può essere non degenere.

Proposizione 1.3.11 *Se M è una varietà di Poisson e N una sottovarietà tale che, per ogni foglia simplettica $S \subset M$ l'intersezione $S \cap N$ è anche una varietà simplettica allora N è una varietà di Poisson rispetto alla struttura indotta da M in modo che le sue foglie simplettiche siano esattamente le $S \cap N$.*

L'idea di questa costruzione è di definire le parentesi di Poisson su N come, se $x \in N$:

$$\{f, g\}(x) = (X_f g)(x)$$

se X_f è il campo hamiltoniano associato alla struttura simplettica su $S \cap N \ni x$. Ovviamente bisogna verificare che questa definizione produca effettivamente una funzione $\{f, g\} \in C^\infty(N)$, cfr. [102, p.38].

L'interesse di questa costruzione sta nel fatto che la sottovarietà N, pur essendo una varietà di Poisson *non è necessariamente una sottovarietà di Poisson di M.*

Di gran lunga più interessante è un'altra costruzione generale che coinvolge i quozienti: per una teoria generale della riduzione si rimanda a [72].

Consideriamo un gruppo di Lie G che agisca su una varietà di Poisson in modo canonico, cioè $m \mapsto g \cdot m$ deve essere una mappa di Poisson. Se l'azione

$$A : G \times M \longrightarrow M$$

è propria (cioè se è propria la mappa A) e libera (cioè priva di punti fissi) allora il quoziente M/G è una varietà differenziabile e la proiezione $p : M \longrightarrow M/G$ è una sottoimmersione suriettiva (cfr. [1, §4.1]).

Teorema 1.3.12 *Esiste un'unica struttura di Poisson su M/G che renda $p : M \longrightarrow M/G$ una mappa di Poisson.*

L'idea è ovviamente quella di definire, per $f, g \in C^\infty(M/G)$:

$$\{f, g\} \circ p = \{f \circ p, g \circ p\}$$

Per i dettagli cfr. [73, §10.7]. Qui ci limitiamo ad illustrare questa costruzione con l'esempio fondamentale: sia $M = T^*G$, il fibrato cotangente del gruppo di Lie G rispetto alla sua struttura simplettica standard.

Evidentemente G agisce sul suo fibrato tangente semplicemente per sollevamento dell'azione regolare: quest'ultima è la moltiplicazione a sinistra $A : G \times G \longrightarrow G$ definita come $A(g)h = A_g h = gh$; si rammenti ora che un gruppo di Lie è parallelizzabile (cfr. [84]), cioè $\mathfrak{X}(G)$ possiede una base come $C^\infty(G)$-modulo, data da una qualsiasi base dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di G vista come spazio dei campi invarianti a sinistra. Similmente $\Omega^1(G)$ possiede una $C^\infty(G)$-base data da una qualsiasi base dello spazio $\mathfrak{g}^*$ delle 1-forme invarianti a sinistra; questo vuol dire che il fibrato cotangente è banale, $T^*G = G \times \mathfrak{g}^*$, e quindi che il sollevamento dell'azione regolare si definisce semplicemente come ($g \in G$, $\varphi \in \mathfrak{g}^*$)

$$\tilde{A}_h(g, \varphi) = (hg, \varphi)$$

Evidentemente si tratta di una azione propria e libera, e il quoziente è la varietà lineare $\mathfrak{g}^* = T^*G/G$; la proiezione $p : T^*G \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ è la proiezione canonica p del prodotto $G \times \mathfrak{g}^*$ sul suo secondo fattore.

Ora, secondo quanto afferma il teorema precedente, esiste un'unica struttura di Poisson su $\mathfrak{g}^*$ che renda questa mappa un morfismo di Poisson, che possiamo definire con la formula precedente; per capire esattamente quali parentesi otteniamo su $\mathfrak{g}^*$, notiamo che, date $f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ possiamo interpretarle come funzioni "invarianti a sinistra sul fibrato cotangente di G: precisamente f e g si estendono in modo unico a due funzioni $\tilde{f}, \tilde{g} \in C^\infty(T^*G)$, tali che $f \circ p = \tilde{f}$ e $g \circ p = \tilde{g}$: allora

$$\widetilde{\{f, g\}}_{\mathfrak{g}^*} = \{\tilde{f}, \tilde{g}\}_{T^*G}$$

Quello che si può dimostrare (cfr.[1, §4], [63, §4], [?, §13]) è che le parentesi $\{\,\}_{\mathfrak{g}^*}$ sono esattamente le parentesi di Lie–Poisson. Dunque il teorema di riduzione rispetto all'azione di un gruppo, nel caso del fibrato cotangente del gruppo, ci dice che le parentesi sullo spazio ridotto sono esattamente le parentesi di Lie–Poisson: possiamo cioè calcolarle estendendo le funzioni su $\mathfrak{g}^*$ a funzioni G-invarianti su T^*G, calcolando le parentesi simplettiche e poi restringendo di nuovo a $\mathfrak{g}^*$.

Si rammenti inoltre che possiamo calcolare le parentesi di Lie–Poisson anche per restrizione, cioè considerando la foglia passante per il punto nel quale vogliamo calcolarle, restringere le funzioni a quella foglia e usare la forma simplettica della foglia medesima; esistono profonde applicazioni meccaniche di questa identità fra il procedimento di restrizione (usando la stratificazione simplettica di $\mathfrak{g}^*$) e di estensione (usando la riduzione $T^*G \longrightarrow \mathfrak{g}^*$) discusse ad esempio in [73, §11-15].

1.4 Gruppi di Poisson–Lie e bialgebre di Lie

Una classe di esempi di varietà di Poisson che non ha luogo nel caso simplettico è data dai gruppi di Poisson-Lie introdotti da Drinfel'd (anche se alcuni prodromi della teoria emergono nei lavori di Sklijanin e di Belavin e Drinfel'd sul metodo inverso della diffusione quantistica) in [35]. Sebbene le motivazioni dell'attenzione nei confronti di questi oggetti si trovino nella teoria dei gruppi quantistici è perfettamente giustificabile la loro introduzione, nel nostro contesto, in vista di una generalizzazione naturale delle varietà di Lie–Poisson. Infatti una varietà di Lie–Poisson, malgrado possa avere una struttura di Poisson non banale, è comunque assai semplice dal punto di vista geometrico e topologico, essendo uno spazio vettoriale: è quindi naturale cercare di fornire esempi non lineari di varietà di quel tipo, il che conduce naturalmente alla nozione di gruppo di Poisson–Lie.

Il concetto di gruppo di Poisson–Lie si ottiene sostituendo al gruppo additivo (dello spazio vettoriale) $\mathbb{R}^n$ un qualsiasi gruppo di Lie nella costruzione della varietà di Lie–Poisson.

Definizione 1.4.1 *Un* gruppo di Poisson–Lie *è un gruppo di Lie G dotato di una struttura di Poisson $\{\,\}$ in modo che la moltiplicazione*

$$\mu : G \times G \longrightarrow G$$

del gruppo sia una mappa di Poisson: $\mu \in P^\infty(G \times G, G)$.

Ad esempio se $G = \mathbb{R}^n$ rispetto alla struttura di gruppo di Lie abeliano data dalla somma vettoriale, qualsiasi struttura di Lie–Poisson rende G un gruppo di Poisson–Lie; lo dimostreremo agevolmente fra breve non appena avremo dato alcune utili caratterizzazioni dei gruppi di Poisson–Lie: infatti non ogni tensore di Poisson definisce una struttura di gruppo di Poisson–Lie su un gruppo di Lie dato: ad esempio, sul gruppo abeliano $\mathbb{R}^2$ la struttura $\{f, g\}(x, y) = (x^2 + y^2)(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y})$ non soddisfa la condizione della definizione precedente.

Proposizione 1.4.2 *Se G è un gruppo di Lie, le seguenti condizioni sono equivalenti*

(1) *G è un gruppo di Poisson–Lie rispetto a un tensore di Poisson π.*

(2) *$\pi_{gh} = (L_g)_*\pi_h + (R_h)_*\pi_g$ se $g, h \in G$ e L_g e R_g sono le azioni regolari sinistra e destra.*

(3) *(G connesso) $\pi_e = 0$ e $\mathcal{L}_X\pi$ è invariante a sinistra (destra) se lo è X.*

Queste sono verifiche immediate dalla definizione (cfr. [70], [102, §10], [56]). Notiamo in particolare che $\pi_e = 0$ (per la (2) della proposizione, ove e è l'unità del gruppo di Lie G) e che la mappa $\iota : G \longrightarrow G$ data dal passaggio all'elemento inverso è di Poisson.

Notiamo inoltre che, avendosi $\pi_e = 0$, una struttura di gruppo di Poisson–Lie ha sempre rango nullo in e e quindi *un gruppo di Poisson–Lie non può* *mai essere simplettico.* Abbiamo cioè degli esempi di varietà di Poisson che non possono in alcun modo provenire dalla geometria simplettica.

Consideriamo ad esempio una varietà di Lie–Poisson $\mathfrak{g}^*$: allora il tensore di Poisson verifica la (2), perché, se π è il suo tensore di Poisson, essendo questo lineare, deve aversi $\pi_{x+y} = \pi_x + \pi_y$. Notiamo inoltre che se π è un qualsiasi tensore di Poisson sul gruppo abeliano $(\mathbb{R}^n, +)$ allora affinché vi induca una struttura di gruppo di Poisson–Lie deve aversi la medesima equazione (2), e quindi π è necessariamente lineare. Dunque

Corollario 1.4.3 *$\mathbb{R}^n$ è un gruppo di Poisson–Lie additivo solo per la struttura di Lie–Poisson.*

Ad esempio, se consideriamo il toro $\mathbb{T}^n$, che pure è abeliano, vediamo immediatamente che non ammette alcuna struttura di gruppo di Poisson–Lie: se infatti esistesse un tensore π di Poisson su $\mathbb{T}^n$ che soddisfacesse la (2) del teorema precedente, potremmo, per mezzo della suriezione canonica $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n = \mathbb{T}^n$, sollevarlo ad un tensore di Poisson che renderebbe $\mathbb{R}^n$ un gruppo di Poisson–Lie; ma questo tensore dovrebbe avere componenti periodiche, quindi di certo non lineari, il che non è possibile per la proposizione precedente.

Su un gruppo di Lie G importanza particolare rivestono i campi invarianti (a destra o sinistra): se P è un tensore controvariante su G possiamo sempre considerare una mappa

$$R^*P : G \longrightarrow \otimes^k \mathfrak{g}$$

(ove $\mathfrak{g}$ =Lie(G) è l'algebra di Lie del gruppo) come

$$R^*P(g) = (R_{g^{-1}})_* P_g$$

Rammentiamo ora che se V è una rappresentazione di G, un operatore $\gamma : G \longrightarrow V$ tale che

$$\gamma(gh) = g \cdot \gamma(h) + \gamma(g)$$

si dice *1-cociclo* di G a valori in V. Questa terminologia è presa dalla teoria della coomologia delle algebre di Lie a coefficienti in una rappresentazione V di $\mathfrak{g}$ (cfr. [19, §XIII], [84, §19], [41, §1.3]): in effetti, se G è un gruppo di Lie–Poisson, con tensore di Poisson π allora possiamo considerare la "derivata intrinseca di questo tensore nell'identità del gruppo, come

$$D\pi = (dR^*\pi)_e$$

e troviamo che

Proposizione 1.4.4 *La derivata $D\pi$ è un 1-cociclo rispetto all'azione aggiunta sullo spazio $\gamma \wedge \gamma$.*

DIMOSTRAZIONE: Poiché il tensore π soddisfa alla

$$\pi_{gh} = (L_g)_*\pi_h + (R_h)_*\pi_g$$

abbiamo che

$$\begin{aligned} R^*\pi(gh) &= (R_{(gh)^{-1}})_*\pi_{gh} = (R_{h^{-1}g^{-1}})_*\left((L_g)_*\pi_h + (R_h)_*\pi_g\right) \\ &= \mathrm{Ad}_g(R_{h^{-1}})_*\pi_h + (R_{g^{-1}})_*\pi_g \\ &= \mathrm{Ad}_g\, R^*\pi_h + R^*\pi_g \end{aligned}$$

Ora, nell'intorno di $e \in G$, utilizziamo le coordinate canoniche (cfr. [83, §42–44], [84, §4]) per scrivere $g = \exp tX$ e $h = \exp tY$ $(t \in \mathbb{R})$ in modo che

$$gh = \exp\left(tX + tY + \frac{1}{2}t^2[X, Y] + o(t^3)\right)$$

La formula precedente diviene dunque

$$R^*\pi_{\exp\left(tX+tY+\frac{1}{2}t^2[X,Y]+o(t^3)\right)} = \mathrm{Ad}_{\exp tX}\, R^*\pi_{\exp tY} + R^*\pi_{\exp tX}$$

che, derivata rispetto a t e calcolata in $t = 0$, dà luogo alla

$$D\pi(gh) = \mathrm{ad}_g\, D\pi(h) + D\pi(g)$$

(rammentando che $\mathrm{Ad}_{\exp X} = \exp \mathrm{ad}_X$).

QED

Drinfel'd ha dimostrato (cfr. [35] e [56]) il

Teorema 1.4.5 *Se G è un gruppo di Poisson–Lie e $\gamma = D\pi$ allora la mappa duale $\gamma^* : \bigwedge^2 \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ definisce una parentesi di Lie su $\mathfrak{g}^*$.*

Si giunge in questo modo ad un concetto algebrico di per sé interessante:

Definizione 1.4.6 *Una* bialgebra di Lie *è una coppia $(\mathfrak{g}, \gamma)$ ove $\mathfrak{g}$ è un'algebra di Lie, $\gamma : \mathfrak{g} \longrightarrow \bigwedge^2 \mathfrak{g}$ un 1-cociclo rispetto alla rappresentazione aggiunta la cui duale renda $\mathfrak{g}^*$ un'algebra di Lie.*

Rammentiamo che questo significa che

$$\gamma[X, Y] = [\gamma X, Y] + [X, \gamma Y]$$

Dunque il teorema di Drinfel'd afferma che l'algebra di Lie di un gruppo di Poisson–Lie è una bialgebra di Lie: la struttura di varietà si riflette nelle parentesi su $\mathfrak{g}$, la struttura di Poisson si riflette nelle parentesi su $\mathfrak{g}^*$ e la condizione di compatibilità della struttura di Poisson col prodotto di Lie si riflette nella condizione di cociclo.

Più in generale enunciamo il[7]

Teorema (Drinfel'd) **1.4.7** *Esiste un funtore dalla categoria dei gruppi di Poisson–Lie alla categoria delle bialgebre di Lie, e questo funtore, ristretto alla sottocategoria dei gruppi di Poisson–Lie connessi e semplicemente connessi, è una equivalenza di questa categoria sulla categoria delle bialgebre di Lie.*

Una discussione completa, anche se non nella formulazione che qui abbiamo dato, si trova in [102, §10]; cfr. pure [70].

Lo studio delle bialgebre di Lie riveste quindi la stessa importanza, nel nostro caso, che lo studio delle algebre di Lie ha nel caso dei gruppi di Lie. Una classe particolarmente interessante di queste bialgebre si ottiene considerando la teoria delle equazioni di Yang–Baxter, che ha origine in Meccanica Statistica. Una formulazione generale della teoria di Yang–Baxter si può dare secondo le linee seguenti (sostanzialmente è quale la si ritrova nei lavori di Semenov-Tjian-Šankij: [90], [91], [92], [87]): consideriamo un'algebra di Lie[8] $\mathfrak{g}$ e un operatore lineare

$$R : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

Possiamo allora definire l'applicazione bilineare antisimmetrica

$$[X, Y]_R := [RX, Y] + [X, RY]$$

Definizione 1.4.8 *Una* R-matrice classica *sull'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è un operatore lineare tale che l'applicazione $[]_R$ sia una parentesi di Lie.*

Quando $R : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ è una R-matrice, possiamo considerare la struttura di Lie–Poisson su $\mathfrak{g}^*$ indotta dalle parentesi di Lie $[]_R$, che ha rilevanza nella teoria della diffusione: in particolare si può dimostrare che le funzioni di Casimir rispetto alle parentesi di Lie su $\mathfrak{g}$ usuali formano una sottoalgebra abeliana rispetto alle nuove parentesi $[]_R$ e che le equazioni del moto rispetto

[7] Ovviamente un morfismo di bialgebre di Lie è un morfismo di algebre il cui duale sia un morfismo delle algebre duali, e un morfismo di gruppi di Poisson–Lie è un morfismo di gruppi di Lie che sia anche una mappa di Poisson.

[8] Poiché avremo bisogno di identificare $\mathfrak{g}$ con il suo duale, necessitiamo che l'algebra abbia dimensione finita: in realtà questa limitazione può farsi cadere se si prestano le dovute cautele nella considerazione dei prodotti scalari; qui siamo interessati alle algebre di Lie provenienti da gruppi di Lie, quindi supporremo sempre di trovarci nell'àmbito finito-dimensionale.

alle parentesi di Lie–Poisson indotte da $[\,]_R$ sono nella forma di Lax (cfr. [90], [87, §2]).

Se introduciamo la notazione

$$B_R(X,Y) = [RX, RY] - R[RX, Y] - R[X, RY]$$

allora l'identità di Jacobi per le parentesi $[\,]_R$ equivale alla

$$[B_R(X,Y), Z] + [B_R(Y,Z), X] + [B_R(Z,X), Y] = 0$$

che si chiama *equazione di Yang–Baxter* (YBE). Notiamo che se R è una R-matrice tale che

$$B_R(X,Y) = 0$$

allora

$$[RX, RY] = R[X,Y]_R$$

cioè la condizione che R sia un morfismo di algebre di Lie. Questa è una condizione naturale da richiedere, e si dice *equazione di Yang–Baxter classica* (CYBE). Un'altra immediata condizione che implica l'equazione di Yang–Baxter è ovviamente

$$B_R(X,Y) = \alpha[X,Y]$$

(α scalare) poiché in questo modo l'equazione di Yang–Baxter diviene semplicemente l'identità di Jacobi per le parentesi di Lie $[\,]$. Quest'ultima equazione si chiama *equazione di Yang–Baxter modificata* (MYBE).

Siamo qui interessati alle R-matrici perché inducono strutture di bialgebre di Lie: supponiamo che $\mathfrak{g}$ sia dotata di un prodotto scalare invariante e simmetrico; allora possiamo identificare per mezzo di esso $\mathfrak{g}$ con $\mathfrak{g}^*$ e considerare l'operatore

$$\tilde{R} : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}$$

definito come (scriviamo $\varphi^\#$ per denotare il vettore corrispondente al covettore $\varphi \in \mathfrak{g}^*$):

$$\tilde{R}\varphi = R\varphi^\#$$

Se inoltre R è antisimmetrico rispetto a questo prodotto scalare possiamo definire

$$[\varphi, \psi]_R = \mathrm{ad}^*_{\tilde{R}\varphi}\,\psi - \mathrm{ad}^*_{\tilde{R}\psi}\,\varphi$$

(ad^*_X denota l'azione coaggiunta). Allora (si rammenti l'invarianza del prodotto scalare)

$$\begin{aligned}
[\varphi,\psi]_R(Z) &= \mathrm{ad}^*_{R\varphi^\#}\psi(Z) - \mathrm{ad}^*_{R\psi^\#}\varphi(Z)\\
&= \psi[Z, R\varphi^\#] - \varphi[Z, R\psi^\#]\\
&= (\psi^\#, [Z, R\varphi^\#]) - (\varphi^\#, [Z, R\psi^\#])\\
&= ([R\varphi^\#, R\psi^\#], Z) + ([\varphi^\#, R\psi^\#], Z)\\
&= ([\varphi^\#, \psi^\#]_R, Z)
\end{aligned}$$

Dunque l'identità di Jacobi per le parentesi su $\mathfrak{g}^*$ equivale a quella per le parentesi su $\mathfrak{g}$. Notiamo che abbiamo in questo modo definito una mappa

$$\rho : \mathfrak{g}^* \wedge \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*$$

della quale possiamo considerare la duale:

Teorema 1.4.9 *La mappa duale ρ^* è un 1-cociclo rispetto alla rappresentazione aggiunta di $\mathfrak{g}$ su $\mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$, dunque $(\mathfrak{g}, \rho^*)$ è una bialgebra di Lie.*

(cfr. [102, §10], [56, §2]).

Questo metodo per produrre bialgebre di Lie è importante nelle applicazioni; un esempio notevole è il seguente, dovuto a Semenov-Tijan-Šanskij: consideriamo un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ che sia somma diretta (come spazio vettoriale) di due sottoalgebre $\mathfrak{g}_-$ e $\mathfrak{g}_+$, e condideriamo gli operatori di proiezione

$$P_\pm : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}_\pm$$

e la loro differenza

$$R = P_+ - P_-$$

Allora (scriviamo $X = X_+ + X_-$ per la decomposizione del vettore $X \in \mathfrak{g}$ nelle sue componenti secondo la somma diretta di spazi vettoriali $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$)

$$\begin{aligned}
[X,Y]_R &= [X_+ - X_-, Y_+ + Y_-] + [X_+ + X_-, Y_+ - Y_-]\\
&= [X_+, Y_+] - [X_-, Y_+] + [X_+, Y_-] - [X_-, Y_-] +\\
&+ [X_+, Y_+] - [X_+, Y_-] + [X_-, Y_+] - [X_-, Y_-]\\
&= 2[X_+, Y_+] - 2[X_-, Y_-]
\end{aligned}$$

Notiamo inoltre che

$$R(X_+) = X_+ \qquad \text{e} \qquad R(X_-) = -X_-$$

Quindi (si osservi che $[X_\pm, Y_\pm] \in \mathfrak{g}_\pm$ per ipotesi)

$$\begin{aligned}
B_R(X,Y) &= [RX,RY] - R[X,Y]_R \\
&= [X_+ - X_-, Y_+ - Y_-] - 2R[X_+,Y_+] + 2R[X_-,Y_-] \\
&= [X_+,Y_+] - [X_+,Y_-] + [X_-,Y_-] - [X_-,Y_+] \\
&\qquad\qquad\qquad - 2[X_+,Y_+] - 2[X_-,Y_-]+ \\
&= -[X_+,Y_+] - [X_+,Y_-] - [X_-,Y_+] - [X_-,Y_-] \\
&= -[X,Y]
\end{aligned}$$

sicché R è una R-matrice che soddisfa l'equazione di Yang–Baxter modificata.

L'importanza delle R-matrici che soddisfano l'equazione di Yang–Baxter modificata risiede nel seguente teorema, sostanzialmente dovuto a Belavin e Drinfel'd (cfr. [90], [91], [56])

Teorema 1.4.10 *Se $\mathfrak{g}$ è un'algebra semplice complessa allora una qualsiasi struttura di bialgebra di Lie è indotta da una R-matrice che soddisfa l'equazione di Yang–Baxter modificata.*

Che una qualsiasi struttura di bialgebra su un'algebra semisemplice sia necessariamente indotta da una R-matrice è ovvio: infatti ogni 1-cociclo di un'algebra semisemplice è un 1-cobordo (a coefficienti in qualsivoglia rappresentazione) per il lemma di Whitehead (cfr. [84, §19]).

Se $(\mathfrak{g},\gamma)$ è una bialgebra di Lie, possiamo considerare la sua *bialgebra duale* $(\mathfrak{g}^*,\lambda)$ ove $\lambda : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^* \wedge \mathfrak{g}^*$ è la mappa duale della parentesi di Lie di $\mathfrak{g}$; abbiamo ovviamente un isomorfismo naturale fra la duale della duale di una bialgebra di Lie e la bialgebra medesima. Inoltre vale il seguente risultato, dovuto a Drinfel'd e Manin (cfr. [35], [90], [91], [56])

Teorema 1.4.11 *Se $(\mathfrak{g},\gamma)$ è una bialgebra di Lie allora esiste un'unica struttura di algebra di Lie sullo spazio vettoriale $\mathfrak{d} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ tale che $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}^*$ siano sottoalgebre e tale che il prodotto scalare*

$$(X+\varphi, Y+\psi) := \varphi(Y) + \psi(X)$$

sia invariante.

L'algebra di Lie $\mathfrak{d}$ si dice *doppio della bialgebra di Lie* $\mathfrak{g}$; si noti che le sottoalgebre $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}^*$ di $\mathfrak{d}$ sono isotrope rispetto al prodotto scalare $(\,)$. La struttura di algebra di Lie $[\,]_\mathfrak{d}$ postulata dal teorema è determinata dalle seguenti condizioni ($X, Y \in \mathfrak{g}$, $\varphi,\psi \in \mathfrak{g}^*$):

$$[X,Y]_\mathfrak{d} = [X,Y]_\mathfrak{g} \quad \text{e} \quad [\varphi,\psi]_\mathfrak{d} = [\varphi,\psi]_{\mathfrak{g}^*} \quad \text{e} \quad [X,\varphi]_\mathfrak{d} = -\operatorname{ad}^*_\varphi X + \operatorname{ad}^*_X \varphi$$

ove ad^* denota l'azione coaggiunta. Si noti che il doppio di $\mathfrak{g}$ si presenta in modo naturale come una bialgebra di Lie, perché possiamo considerare la R-matrice

$$R = P_{\mathfrak{g}} - P_{\mathfrak{g}^*}$$

ottenuta come differenza degli operatori di proiezione sulle sottoalgebre $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}^*$ di $\mathfrak{d}$.

Illustriamo ora la teoria con alcuni esempi che prendiamo da [35].

Esempio. Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie complessa semplice di rango r, con sottoalgebra di Cartan $\mathfrak{h}$ e sottoalgebra di Borel (rispetto ad un ordinamento positivo del sistema di radici) $\mathfrak{b}_+$ (cfr. [83, §62], [45, §16]). Se poniamo $\mathfrak{k} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ (somma diretta di algebre di Lie) e consideriamo le sottoalgebre

$$\mathfrak{k}_1 = \{X \oplus X \mid X \in \mathfrak{g}\}$$

$$\mathfrak{k}_2 = \{X \oplus Y \mid X \in \mathfrak{b}_+,\ Y \in \mathfrak{b}_-,\ \mathfrak{h}\text{-componenti di } X \text{ e } Y \text{ opposte}\}$$

allora su $\mathfrak{k}$ abbiamo un prodotto scalare

$$(X \oplus Y, X' \oplus Y') = (\langle X, X'\rangle - \langle Y, Y'\rangle)$$

ove $\langle\,\rangle$ è la forma di Killing su $\mathfrak{g}$. Dunque $(\,)$ è un prodotto scalare non degenere (perché lo è $\langle\,\rangle$) e invariante rispetto al quale $\mathfrak{k}_1$ e $\mathfrak{k}_2$ sono sottoalgebre isotrope e complementari.

Ora possiamo identificare $\mathfrak{k}_2$ con $\mathfrak{k}_1^*$, associando al vettore $X \oplus Y \in \mathfrak{k}_2$ il covettore $C(X,Y) \in \mathfrak{k}_1^*$ definito come

$$C(X,Y)(X' \oplus X') = (X \oplus Y, X' \oplus X')$$

La mappa $X \oplus Y \mapsto C(X,Y)$ è iniettiva, dato che $C(X,Y) = 0$ implica $(X \oplus Y, X' \oplus X') = 0$, cioè $\langle X, X'\rangle = \langle Y, X'\rangle$ e, poiché X e Y appartengono all'algebra di Borel positiva e negativa, deve aversi $X' = 0$. Inoltre, $\mathfrak{k}_1$ e $\mathfrak{k}_2$ hanno visibilmente la stessa dimensione, quindi $\mathfrak{k}_1^* = \mathfrak{k}_2$.

Dunque le parentesi di Lie su $\mathfrak{k}_2$ definiscono delle parentesi di Lie su $\mathfrak{k}_1$ che la rendono una bialgebra di Lie (questo metodo per produrre bialgebre di Lie lo si deve a Manin, cfr. [35]): naturalmente è possibile scrivere in termini concreti questa struttura di bialgebra, ricorrendo ad esempio alla base di Weyl ([45, §10]).

Per non violare una consolidata tradizione diamo questi dettagli solo per il caso $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$; consideriamo la sua base di Weyl $\{H, X, Y\}$: la forma di Killing in questo caso è determinata dalle

$$\langle H, H\rangle = 8 \qquad \text{e} \qquad \langle X, Y\rangle = 4$$

(ed è zero negli altri casi). $\mathfrak{b}_+$ è generata da H e X (e $\mathfrak{b}_-$ è generata da H e Y), sicché una base per $\mathfrak{k}_1$ è $\{H \oplus H, X \oplus X, Y \oplus Y\}$, mentre una base per $\mathfrak{k}_2$ è $\{H \oplus -H, 0 \oplus X, Y \oplus 0\}$ in modo che

$$(H \oplus H, H \oplus -H) = -16 \quad \text{e} \quad (Y \oplus Y, 0 \oplus X) = 4 \quad \text{e} \quad (X \oplus X, Y \oplus 0) = -4$$

(e svanisce negli altri casi). Questo prodotto scalare ci consente di identificare $\mathfrak{k}_1^*$ con $\mathfrak{k}_2$ per mezzo delle posizioni

$$H \oplus -H \mapsto -16H^* \qquad \text{e} \qquad 0 \oplus X \mapsto 4Y^* \qquad \text{e} \qquad Y \oplus 0 \mapsto -4X^*$$

Ora, dato che le regole di commutazione per $\mathfrak{k}_2$ sono

$$\begin{aligned} &[H \oplus -H, 0 \oplus X] = 0 \oplus -[H, X] = -2(0 \oplus X) \\ &[H \oplus -H, Y \oplus 0] = [H, Y] \oplus 0 = -2(Y \oplus 0) \\ &[0 \oplus X, Y \oplus 0] = 0 \end{aligned}$$

ne deduciamo le regole di commutazione per il duale di $\mathfrak{k}_1$ e quindi la sua struttura di bialgebra di Lie:

$$[H^*, X^*] = \frac{1}{8}X^* \qquad \text{e} \qquad [H^*, Y^*] = \frac{1}{8}Y^* \qquad \text{e} \qquad [X^*, Y^*] = 0$$

Si tratta dunque ancora di $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

Esempio. Continuiamo l'esempio precedente dell'algebra di Lie semplice complessa $\mathfrak{g}$: sia $\{H_j, X_\alpha, Y_\alpha\}_{j=1,\dots,r;\alpha\in\Delta^+}$ la sua base di Weyl; lo spazio reale generato dagli elementi

$$iH_j \qquad \text{e} \qquad X_\alpha - Y_\alpha \qquad \text{e} \qquad i(X_\alpha + Y_\alpha)$$

è una sottoalgebra reale $\mathfrak{k}$ di $\mathfrak{g}$ (vista come algebra di Lie reale) che si dice la sua forma compatta, e che soddisfa alla

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{b}$$

ove $\mathfrak{b}$ è la sottoalgebra reale di Borel, generata dagli elementi della forma H_j e X_α.

Allora $\mathfrak{k}$ è una bialgebra di Lie (con bialgebra duale $\mathfrak{b}$) dato che possiamo considerare i ragionamenti precedentemente svolti usando come prodotto scalare la parte immaginaria della forma di Killing.

Di nuovo chiariamo nel caso più semplice: consideriamo cioè $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ e quindi $\mathfrak{k} = \mathfrak{su}(2)$. Allora una base di $\mathfrak{k}$ è

$$E_1 = iH \qquad \text{e} \qquad E_2 = X - Y \qquad \text{e} \qquad E_3 = i(X+Y)$$

mentre una base di $\mathfrak{b}$ è

$$F_1 = H \qquad \text{e} \qquad F_2 = X \qquad \text{e} \qquad F_3 = iX$$

Si tratta, quest'ultima, dell'algebra delle matrici triangolari superiori con diagonale reale e traccia nulla.

Determiniamo quindi la struttura di bialgebra di Lie su $\mathfrak{k}$ scrivendo i commutatori dell'algebra di Lie $\mathfrak{b}$: quest'ultima si identifica a $\mathfrak{k}^*$ per mezzo delle posizioni

$$F_1 \mapsto 16E_1^* \qquad \text{e} \qquad F_2 \mapsto 8E_3^* \qquad \text{e} \qquad F_3 \mapsto -8E_2^*$$

(ovviamente (E_1^*, E_2^*, E_3^*) è la base duale di (E_1, E_2, E_3)). Ma le relazioni di Weyl si leggono come

$$[F_1, F_2] = 2F_2 \qquad \text{e} \qquad [F_1, F_3] = 2F_3 \qquad \text{e} \qquad [F_2, F_3] = 0$$

sicché la struttura di bialgebra è data dalle regole seguenti

$$[E_1^*, E_2^*] = \frac{1}{8}E_2^* \qquad \text{e} \qquad [E_1^*, E_3^*] = \frac{1}{8}E_3^* \qquad \text{e} \qquad [E_2^*, E_3^*] = 0$$

Dunque $\mathfrak{su}(2)^*$ è un'algebra di Lie risolubile.

Tutta questa nostra discussione sulle bialgebre di Lie si può riportare ai gruppi di Poisson–Lie per mezzo del teorema di Drinfel'd: ad esempio, dato che i gruppi di Poisson–Lie connessi e semplicemente connessi corrispondono in modo biunivoco alle bialgebre di Lie possiamo integrare le strutture di bialgebre da noi determinate a strutture di gruppo di Poisson–Lie.

Ad esempio, se $R : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ è una R-matrice e se esiste un prodotto scalare $(\,)$ invariante che ci consenta di identificare $\mathfrak{g}$ con $\mathfrak{g}^*$ allora possiamo considerare il tensore $r \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ definito come $(\varphi, \psi \in \mathfrak{g}^*)$

$$\langle r, \varphi \wedge \psi \rangle = \langle \tilde{R}\varphi, \psi \rangle$$

Un tensore sull'algebra di Lie può considerarsi sia come un tensore invariante a destra che come un tensore invariante a sinistra: se R_g è la traslazione a destra e L_g è la traslazione a sinistra possiamo definire i tensori

$$(L_g)_* r : G \longrightarrow TG \wedge TG \qquad \text{e} \qquad (R_g)_* r : G \longrightarrow TG \wedge TG$$

La seguente osservazione è dovuta a Drinfel'd:

Proposizione 1.4.12 *I tensori $(L_g)_*r$ e $(R_g)_*r$ sono tensori di Poisson su G se r è indotto da una R-matrice, e ogni loro combinazione lineare è pure una struttura di Poisson.*

Tuttavia in questa famiglia $\alpha(L_g)_*r + \beta(R_g)_*r$ di strutture di Poisson su G soltanto

$$\pi^r = (L_g)_*r - (R_g)_*r$$

rende G un gruppo di Poisson–Lie:

Teorema 1.4.13 *Un tensore $\pi \in TG \wedge TG$ rende un gruppo di Lie G un gruppo di Poisson–Lie se e solo se è della forma π^r per qualche R-matrice r.*

(per questi risultati cfr. [70], [56] e [102, §10]).

Consideriamo ad esempio il gruppo di Lie $SL(2,\mathbb{C})$ la cui algebra è $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$: la forma di Killing definisce un tensore doppio $k \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ (l'*elemento di Casimir*, cfr. [44, §6])

$$k = \frac{1}{16} H \otimes H + \frac{1}{8}(X \otimes Y + Y \otimes X)$$

Definiamo allora

$$r = \frac{1}{16}(H \otimes H + 2X \otimes Y)$$

ottenendo un tensore che, come ogni tensore doppio, si decompone univocamente in una parte simmetrica (la forma di Killing) e una parte antisimmetrica (cioè $a = \frac{1}{2} X \wedge Y$): quest'ultima induce una struttura di bialgebra di Lie su $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ semplicemente considerando il suo cobordo nel senso della coomologia delle algebre di Lie, che è determinato dalle

$$\delta a(H) = 0 \qquad \text{e} \qquad \delta a(X) = \frac{1}{2} X \wedge H \qquad \text{e} \qquad \delta a(Y) = \frac{1}{2} Y \wedge H$$

e che induce la parentesi di Lie seguente su $\mathfrak{su}(2,\mathbb{C})$:

$$[H^*, X^*] = \frac{1}{2} X^* \qquad \text{e} \qquad [X^*, Y^*] = \frac{1}{2} Y^* \qquad \text{e} \qquad [X^*, Y^*] = 0$$

Si tratta cioè della struttura che avevamo precedentemente dedotto (questo è un esempio concreto dell'equivalenza del tensore $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ e dell'operatore $R : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ in presenza di un prodotto scalare invariante, la forma di Killing in questo caso).

Ora passiamo al gruppo $G = SL(2,\mathbb{C})$ e consideriamo su di esso il tensore $16r$ (normalizzato per comodità): se scriviamo il tensore

$$\pi_g = (R_g)_*r - (L_g)_*r$$

ove $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, otteniamo le regole di commutazione, per le parentesi di Poisson, in termini di funzioni coordinate

$$\begin{array}{ccccc} \{a,b\} = ab & \text{e} & \{a,c\} = ac & \text{e} & \{a,d\} = 2bc \\ \{b,c\} = 0 & \text{e} & \{b,d\} = bd & \text{e} & \{c,d\} = cd \end{array}$$

Se invece consideriamo il gruppo di matrici reali $SL(2,\mathbb{R})$ e il tensore

$$r = X \otimes H - H \otimes X$$

otteniamo una R-matrice che soddisfa l'equazione di Yang–Baxter classica, e tale che

$$\delta r(X) = 0 \qquad \text{e} \qquad \delta r(Y) = 2Y \wedge X \qquad \text{e} \qquad \delta r(H) = X \wedge H$$

Infine, sul gruppo $SU(2)$ la cui algebra di Lie è la forma reale e compatta $\mathfrak{su}(2)$ di $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, considerando la base dell'algebra di Lie

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad Y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad Z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

con le regole di commutazione

$$[X,Y] = Z \qquad \text{e} \qquad [Y,Z] = X \qquad \text{e} \qquad [Z,X] = Y$$

il tensore $r = Y \wedge X$ dà luogo alle parentesi di Poisson–Lie

$$\begin{array}{ccccc} \{a,b\} = iab & \text{e} & \{a,c\} = iac & \text{e} & \{a,d\} = 2ibc \\ \{b,c\} = 0 & \text{e} & \{b,d\} = ibd & \text{e} & \{c,d\} = icd \end{array}$$

Questi esempi si generalizzano al caso di $SL(n,\mathbb{C})$ e di un qualsiasi gruppo semisemplice complesso: in generale si utilizza la decomposizione di Iwasawa per ottenere il gruppo di Poisson–Lie reale e compatto soggiacente, e le formule possono darsi in termini della teoria delle radici delle algebre di Lie e delle basi di Weyl: per una discussione completa cfr. [70], [69], [66], [56]; inoltre una teoria analoga ha luogo anche per i *loop groups* perché a livello algebrico può svolgersi nel caso delle algebre di Kac–Moody: questo è solo accennato da Drinfel'd [35] e Semenov-Tijan-Šanskij [90], ma si può trovare discusso ad esempio in [40].

I concetti di bialgebra duale e di doppio di una bialgebra di Lie si prestano ad una globalizzazione sui gruppi di Poisson–Lie: ad esempio, se G è un gruppo di Poisson–Lie e $\mathfrak{g}$ la sua algebra di Lie, dato che è una bialgebra, esiste un unico gruppo di Lie G^* connesso e semplicemente connesso la cui algebra di Lie sia $\mathfrak{g}^*$, che chiamiamo *duale del gruppo di Poisson–Lie* G. Si tratta ovviamente di un gruppo di Poisson–Lie dato che la sua algebra di Lie è una bialgebra, e il suo duale è il rivestimento universale di G.

Una volta definito il duale di un gruppo di Poisson–Lie possiamo anche considerarne il doppio, che è per definizione il gruppo di Lie D connesso e semplicemente connesso la cui algebra di Lie è il doppio $\mathfrak{d}$ della bialgebra di Lie di G (esiste anche un altro concetto di doppio di un gruppo di Poisson–Lie, il *doppio di Heisenberg*, per il quale si vedano [93] e [3]).

Esempio. Se G è un gruppo di Lie equipaggiato del tensore di Poisson nullo allora $\mathfrak{g}^*$ è un'algebra di Lie abeliana, e quindi il gruppo che la integra è lo spazio vettoriale $\mathfrak{g}^*$ stesso; dunque il duale di un gruppo di Poisson–Lie nullo è una varietà di Lie–Poisson. Il doppio di G col tensore di Poisson nullo è il prodotto semidiretto di G con $\mathfrak{g}^*$ rispetto alla rappresentazione coaggiunta: in altri termini è il gruppo di Lie T^*G, il fibrato cotangente di G.

Esempio. Se consideriamo il gruppo $SU(2)$ con la struttura di Poisson–Lie indotta dalla R-matrice $r = Y \wedge X$ allora il suo duale è il gruppo risolubile connesso $SB(2, \mathbb{C})$ costituito dalle matrici della forma

$$\begin{pmatrix} a & b + ic \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$$

ove $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a > 0$. In effetti una base dell'algebra di Lie di questo gruppo è

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e}$$

con le regole di commutazione

$$[H, X] = 2X \qquad \text{e} \qquad [H, Y] = 2Y \qquad \text{e} \qquad [X, Y] = 0$$

e quindi è isomorfa a $\mathfrak{su}(2)^*$. Si noti che possiamo costruire $SB(2, \mathbb{C})$ anche come il sottogruppo di $B_- \times B_+$ (ove $B_\pm$ è il sottogruppo di Borel in $SL(2, \mathbb{R})$) dei prodotti $g \times h$ tali che gli elementi diagonali delle matrici g siano gli inversi degli elementi diagonali delle matrici h; dunque $SB(2, \mathbb{C})$ è anche il duale del gruppo di Poisson–Lie $SL(2, \mathbb{R})$. Si noti tuttavia che $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})^*$ e $\mathfrak{su}(2)^*$ non sono isomorfe come bialgebre di Lie, sicché $SB(2, \mathbb{C})$ ha due strutture di gruppo di Poisson–Lie diverse secondo che sia considerato come il duale di $SU(2)$ o di $SL(2, \mathbb{R})$. Il doppio di $SU(2)$ è esplorato in dettaglio in [2].

Menzioniamo che esiste una caratterizzazione delle foglie simplettiche dei gruppi di Poisson–Lie in termini di trasformazioni di rivestimento, la cui teoria è sviluppata in [91], [70], [109], [56], [3]. Infine, per una discussione chiara e approfondita dei risultati di classificazione per i gruppi semplici, rimandiamo a [16].

Capitolo 2

Algebra delle parentesi di Poisson

In questo capitolo affrontiamo le strutture di Poisson da un punto di vista formale con lo scopo di trattare in modo completo e generale il calcolo differenziale di Poisson: inquadreremo quindi la teoria delle parentesi di Poisson nel contesto delle algebre associative, e faremo intervenire il calcolo differenziale nel contesto algebrico, sviluppando per questo scopo gli usuali strumenti di calcolo (differenziali e connessioni); su una varietà di Poisson esiste una teoria differenziale "duale che coinvolge i campi vettoriali e le loro potenze esterne piuttosto che le forme differenziali: si può dare una trattazione di questo calcolo, dovuto sostanzialmente a Lichnerowicz, Koszul, Bhaskara e Viswanath (cfr. [64], [57], [9]), in modo puramente algebrico, e questo è quello che faremo applicando le nozioni algebriche introdotte in precedenza.

2.1 Algebre di Poisson

La definizione di varietà di Poisson che abbiamo dato coinvolge in realtà solo l'algebra delle funzioni differenziabili: possiamo in effetti dare questa definizione in un contesto astratto nel quale l'algebra non sia necessariamente quella delle funzioni differenziabili di una varietà; a noi interessa solo questo caso[1] ma, specie per sviluppare il calcolo tensoriale, è utile considerare un contesto più astratto. Fissiamo dunque un anello commutativo con unità $\mathbb{K}$: gli esempi principali che abbiamo in mente sono i PID (come $\mathbb{Z}$, o le serie formali su un PID) e i campi (e.g. reali o complessi).

Definizione 2.1.1 *Un'*algebra di Poisson *è una terna* $(A, \cdot, \{\,\})$ *tale che:*

(1) *A sia una $\mathbb{K}$-algebra associativa rispetto al prodotto $\cdot$;*

(2) *A sia una $\mathbb{K}$-algebra di Lie rispetto alle parentesi $\{\,\}$;*

[1] La teoria generale delle algebre di Poisson non è mai stata oggetto di ricerca: il principale motivo è senza dubbio l'assenza di esempi non geometrici; l'unico aspetto che ha suscitato interesse e diverse ricerche è il rapporto con il caso non commutativo (cfr. [38], [?]), studiato nella teoria della quantizzazione per deformazione (cfr. [?], [44], [?]).

(3) $\forall a, b, c \in A \quad \{ab, c\} = a\{b, c\} + \{a, c\}b$ (*identità di Leibniz*).

L'operazione associativa $\cdot$ *si dice* prodotto *e l'operazione di Lie* $\{\,\}$ *si dice* parentesi di Poisson.

Dunque un'algebra di Poisson è caratterizzata da tre assiomi: l'associatività rispetto al prodotto, l'identità di Jacobi rispetto alle parentesi e la regola di Leibniz, che costituisce una condizione di compatibilità fra la struttura di Lie e quella associativa. *A priori* un'algebra di Poisson non è necessariamente commutativa rispetto al prodotto $\cdot$ benché sia sempre anticommutativa rispetto alle parentesi di Poisson $\{\,\}$ (il che fornisce una blanda motivazione estetica alla considerazione di algebre commutative: in questo caso esiste infatti una maggior simmetria fra la struttura associativa e quella di Lie).

Esempio. Se A è un'algebra associativa allora possiamo renderla un'algebra di Lie $[A]$ ponendo $[a, b] = ab - ba$; rispetto a questa struttura

$$(*) \quad [ab, c] = (ab)c - c(ab) = a(bc) - a(cb) + (ac)b - (ca)b = a[b, c] + [a, c]b$$

e quindi abbiamo un'algebra di Poisson. Si noti che, tuttavia, la struttura di Poisson, così come quella di Lie, è completamente determinata da quella associativa.

Esempio. Se $\mathfrak{g}$ è un'algebra di Lie allora la sua algebra inviluppante universale $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ è un'algebra di Poisson per via dello stesso calcolo (*) o, se si vuole, per il fatto che i funtori che assegnano ad un'algebra associativa A l'algebra di Lie $[A]$ e all'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ la sua inviluppante universale $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ sono aggiunti.

Esempio. Banalmente ogni algebra di Lie e ogni algebra associativa sono algebre di Poisson rispettivamente rispetto alla struttura associativa e alla struttura di Lie nulla.

In generale gli esempi che ci interessano di algebre di Poisson sono tutti del tipo $A = C^\infty(M)$ ove M è una varietà di Poisson: in effetti dire che M è un varietà di Poisson equivale ad affermare che $C^\infty(M)$ è un'algebra di Poisson. Per questo motivo ci limitiamo, d'ora in poi, a considerare esclusivamente algebre commutative e con unità: con *algebra di Poisson* si intenderà dunque un'*algebra di Poisson commutativa con unità.*

Questa restrizione, vediamo immediatamente, elimina alcune situazioni "tautologiche, come gli esempi precedenti nei quali la struttura di Poisson era in realtà contenuta in una struttura associativa o di Lie. In effetti, imponendo che A sia commutativa, la struttura di Poisson, se non è banale, non può essere la struttura di Lie indotta dal prodotto associativo di A, che infatti è abeliana.

I due esempi principali di algebre di Poisson sono i seguenti: li abbiamo già considerati ma qui sono presentati svestiti dei loro panni geometrici.

Esempio. Consideriamo uno spazio vettoriale V, il suo duale V^* e l'algebra simmetrica $\mathrm{Sym}(V^* \oplus V)$ sulla somma diretta dei due spazi (se V è uno spazio vettoriale topologico si considererà l'algebra dei tensori simmetrici continui). Quest'ultima è un'algebra associativa commutativa (in un certo senso è, fra tali algebre, la più generale possibile) isomorfa a $\mathrm{Sym}\, V^* \otimes \mathrm{Sym}\, V$, che possiamo rendere un'algebra di Lie rispetto alle parentesi simplettiche con una definizione induttiva sul grado degli elementi di $\mathrm{Sym}(V^* \oplus V)$: fra un elemento qualsiasi s e un elemento di grado zero c (una costante) si pone per definizione $\{s, c\} = 0$; sugli elementi di grado uno si pone

$$\{\varphi \oplus f, \gamma \oplus g\} = \gamma(f) - \varphi(g)$$

($\varphi, \gamma \in V^*$ e $f, g \in V$) e si estende in grado superiore per bilinearità in modo da rispettare l'identità di Leibniz. Poiché la parentesi fra due elementi qualsiasi è una costante, l'identità di Jacobi è banalmente verificata, e quindi otteniamo una struttura di Poisson che si dice *simplettica* sullo spazio vettoriale V. Se $V = \mathbb{R}^n$ otteniamo semplicemente la restrizione della struttura di Poisson canonica alle funzioni polinomiali in $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$.

Esempio. Consideriamo di nuovo l'algebra simmetrica ma stavolta su uno spazio vettoriale V il cui duale sia un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ (ad esempio, in dimensione finita, basta $V = \mathfrak{g}^*$). Le parentesi che vogliamo definire stavolta non sono costanti, ma lineari: sia $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ l'algebra inviluppante universale di $\mathfrak{g}$; il teorema di Poincaré–Birkhoff–Witt (cfr. [94, §3]) afferma che esiste un isomorfismo di algebre graduate

$$\mathrm{Gr}\, \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \cong \mathrm{Sym}(\mathfrak{g})$$

fra l'algebra graduata associata alla filtrazione naturale dell'algebra inviluppante universale e l'algebra simmetrica su $\mathfrak{g}$. Possiamo rendere $\mathrm{Gr}\, \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ e quindi $\mathrm{Sym}(\mathfrak{g})$ un'algebra di Poisson usando la struttura di Lie su $\mathfrak{g}$ come segue: ricordiamo intanto che l'algebra $\mathfrak{g}$ si immerge in $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ e che l'algebra inviluppante universale è filtrata come (cfr. [94, §3])

$$\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2 \subset \dots \subset \mathcal{U}_k \subset \dots$$

ove $\mathcal{U}_0 = \mathbb{K}$ e $\mathcal{U}_k$ è generato da $\mathbb{K}$ e dai prodotti $x_1 \dots x_h$ (con $h \leq k$) di elementi dell'algebra di Lie (da cui $\mathcal{U}_1 = \mathbb{K} \oplus \mathfrak{g}$). Allora

$$\mathrm{Gr}\, \mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{k \geq 0} \frac{\mathcal{U}_{k+1}}{\mathcal{U}_k}$$

Un elemento di grado k è dunque una classe di equivalenza $[x]$ di prodotti di al più k elementi di $\mathfrak{g}$; possiamo allora definire una mappa bilineare antisimmetrica $\{\,\} : \mathcal{U}_k \times \mathcal{U}_h \longrightarrow \mathcal{U}_{h+k-1}$ come

$$\{[x], [y]\} := [xy - yx]$$

(si noti che l'immagine è in $\mathcal{U}_{h+k-1}$ e non $\mathcal{U}_{h+k}$ in virtù della proprietà universale dell'algebra inviluppante: ad esempio se x, y hanno grado uno, e quindi sono elementi di $\mathfrak{g}$, $xy-yx$ ha pure grado uno venendo a coincidere con $[x, y]$).

Rispetto alle parentesi $\{\,\}$ l'algebra $\mathrm{Gr}\,\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ è di Poisson: l'identità di Leibniz si verifica agevolmente

$$\begin{aligned}\{[x][y], [z]\} &= \{[xy], [z]\} = [xyz - zxy] = [xyz - xzy + xzy - zxy] \\ &= [x(yz - zy)] + [(xz - zx)y] = [x]\{[y], [z]\} + \{[x], [z]\}[y]\end{aligned}$$

mentre l'identità di Jacobi segue da quella per le parentesi di Lie in grado uno e, per induzione, in grado qualsiasi.

Osserviamo che $\mathrm{Sym}(\mathfrak{g})$ può vedersi come l'algebra delle funzioni polinomiali sullo spazio $\mathfrak{g}^*$ e quindi la struttura di Poisson su questa algebra di funzioni è la struttura di Lie–Poisson da noi introdotta nel caso reale: precisamente, se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\dim \mathfrak{g} < \infty$, allora $\mathrm{Sym}(\mathfrak{g}^*) \subset C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ e le parentesi appena introdotte sono esattamente la restrizione ai polinomi delle parentesi di Lie–Poisson. Una discussione dettagliata di questo approccio alle strutture di Lie–Poisson e del legame fra algebre di Lie e varietà di Lie–Poisson (ad esempio con una dimostrazione del teorema di Poincaré–Birkhoff–Witt che faccia intervenire questa struttura di Poisson) si può trovare in [17].

L'esempio precedente ammette una generalizzazione, come osservato da Krasilščik e Vinogradov [60]: in effetti supponiamo che A sia una $\mathbb{K}$-algebra associativa con unità (non necessariamente commutativa) e filtrata, cioè esprimibile come unione $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ di sottospazi tali che

$$A_0 \subset A_1 \subset A_1 \subset ... \subset A_{n-1} \subset A_n \subset A_{n+1} \subset ...$$

in modo che il prodotto associativo sia compatibile con la filtrazione:

$$A_i \cdot A_j \subset A_{i+j}$$

Supponiamo ora che l'algebra A soddisfi alla ulteriore condizione

$$(KV) \qquad [A_i, A_j] \subset A_{i+j-1}$$

ove $[\,]$ è il commutatore indotto dal prodotto associativo (stiamo cioè supponendo che $ab - ba \in A_{i+j-1}$ se $a \in A_i$ e $b \in A_j$. Allora l'algebra graduata associata

$$\mathrm{Gr}\, A = \bigoplus_{n\geq 1} \frac{A_n}{A_{n-1}}$$

è un'algebra di Poisson rispetto al prodotto associativo e al commutatore passati al quoziente: questo si vede esattamente come nel caso $A = \mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

In effetti questa generalizzazione non è tale, perché un'algebra filtrata che soddisfi alla ipotesi (KV) è sempre l'algebra inviluppante di qualche algebra di Lie; precisamente basta considerare A_1, notare che la condizione (KV) diviene $[A_1, A_1] \subset A_1$ e quindi che A_1 è un'algebra di Lie la cui inviluppante universale è, per definizione, A stessa.

Esempio. Un altro esempio di origine geometrica di algebra filtrata è l'algebra degli operatori differenziali su una varietà: possiamo infatti definire il concetto di operatore differenziale su un'algebra associativa A come segue (cfr. [60], [59], [10]); per prima cosa definiamo, fissato $a \in A$, la mappa

$$\mu_a : A \longrightarrow A$$

di moltiplicazione a sinistra: $\mu_a(b) = ab$, e, se $X \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(A)$, poniamo

$$D_a(X) = [\mu_a, X]$$

Si tratta di una mappa $\mathbb{K}$-lineare tanto nella a quanto nella X; definiamo inoltre

$$D_{a_0 a_1 \ldots a_k} = D_{a_0} D_{a_1} \ldots D_{a_k}$$

Definizione 2.1.2 *Un* operatore differenziale *è un operatore $\mathbb{K}$-lineare $X : A \longrightarrow A$ tale che*

$$\forall a_0\ \forall a_1 \ldots\ \forall a_n \quad D_{a_0 a_1 \ldots a_k}(X) = 0$$

*n si dice l'*ordine *dell'operatore.*

Se $A = C^\infty(M)$ è l'algebra delle funzioni di una varietà otteniamo il classico concetto di operatore differenziale (cfr. [30, §XVII-13]): la condizione che D sia un operatore differenziale di ordine n può più semplicemente scriversi $D^{n+1}(X) = 0$. Consideriamo ora lo spazio

$$\mathfrak{D}_n(A) = \{X \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(A) \mid D^{n+1}(X) = 0\}$$

Evidentemente $\mathfrak{D}_0(A) = \{\mu_a\}_{a \in A}$ e

$$\mathfrak{D}_n(A) \subset \mathfrak{D}_{n+1}(A)$$

Allora l'insieme

$$\mathfrak{D}(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{D}_n(A)$$

è un'algebra associativa filtrata: si può dimostrare, per induzione sull'ordine degli operatori (cfr. [10]), che

$$[\mathfrak{D}_n(A), \mathfrak{D}_m(A)] \subset \mathfrak{D}_{n+m-1}(A)$$

e quindi possiamo definire sul graduato associato $\mathrm{Gr}\,\mathfrak{D}(A)$ una struttura di Poisson: ma questo graduato associato non è altro che l'algebra commutativa dei simboli degli operatori differenziali.

Come esempio possiamo considerare uno spazio vettoriale V e l'algebra degli operatori differenziali $\mathfrak{D}(V)$ che si ottiene con la costruzione precedente considerando l'algebra simmetrica $A = \mathrm{Sym}(V)$; si tratta, fissata una base $(e_1, ..., e_n)$ dell'algebra dei polinomi, e un operatore differenziale equivale si scrive come

$$X = \sum_{|\alpha| \le n} p_\alpha \partial^\alpha$$

ove $\alpha = (a_1, ..., a_n)$ è un multiindice e $\partial^\alpha = \partial_1^{a_1} ... \partial_n^{a_n}$ essendo ∂_i la derivazione associata all'elemento e_i ($\partial_i e^j = \delta_{ij}$). Possiamo allora considerare il *simbolo dell'operatore* X, cioè la funzione $\sigma_X : V \times V^* \longrightarrow \mathbb{K}$ definita come

$$\sigma_X(v, \varphi) = \sum_{|\alpha|=n} p_\alpha(v) \varphi_1^{a_1} ... \varphi_n^{a_n}$$

ove $\varphi = \sum_i \varphi_i e^i$ nella base $(e^1, ..., e^n)$ duale di $(e_1, ..., e_n)$. Non è difficile verificare che

$$\sigma_{XY} = \sigma_X \sigma_Y$$

e in effetti il simbolo si può identificare con un elemento del graduato associato di $\mathfrak{D}(V)$, come è evidente dalla definizione. Poiché si tratta di una funzione polinomiale abbiamo

$$\sigma : \mathfrak{D}(V) \longrightarrow \mathrm{Sym}(V \times V^*)$$

funzione che passa al quoziente definendo un isomorfismo di algebre associative

$$\overline{\sigma} : \mathrm{Gr}\,\mathfrak{D}(V) \longrightarrow \mathrm{Sym}(V \times V^*)$$

La prima è un'algebra di Poisson in quanto graduata associata ad un'algebra filtrata (che soddisfa la (KV)), la seconda è un'algebra di Poisson (il nostro primo esempio): si può dimostrare (cfr. [10]) che σ è un isomorfismo di algebre di Poisson. Questo è un esempio astratto di "riduzione di Poisson, fenomeno assai studiato nel caso delle varietà simplettiche [74] e di Poisson [?].

Osserviamo che le algebre di Poisson su $\mathbb{K}$ formano ovviamente una categoria, rispetto ai *morfismi di Poisson*, vale a dire rispetto ai morfismi $f : A \longrightarrow B$ di algebre associative che siano anche morfismi di algebre di Lie:

$$f\{a,b\} = \{f(a), f(b)\} \qquad \text{e} \qquad f(ab) = f(a)f(b)$$

Naturalmente abbiamo le seguenti definizioni:

Definizione 2.1.3 *Una* sottoalgebra di Poisson *di un'algebra di Poisson A è una sottoalgebra associativa di A che sia anche una sottoalgebra di Lie. Una sottoalgebra di Poisson è un* ideale di Poisson *se è un ideale associativo e un ideale di Lie.*

La più importante sottoalgebra di un'algebra di Poisson è la *sottoalgebra di Casimir* (o *spazio degli elementi di Casimir*), che è semplicemente il centro dell'algebra di Lie $(A, \{\,\})$:

$$\operatorname{Cas} A = \{c \in A \,|\, \forall a \in A \quad \{a, c\} = 0\}$$

In termini meccanici gli elementi di Casimir sono le costanti del moto di un qualsiasi sistema hamiltoniano relativo alle parentesi di Poisson dell'algebra A. Si noti che $\operatorname{Cas} A$ non è un ideale di Poisson ma solo un ideale di Lie: infatti se $c \in \operatorname{Cas} A$ e $a, b \in A$ allora $\{ca, b\} = c\{a, b\}$.

Si consideri ad esempio l'algebra $A = C^\infty(S)$ di Poisson di una varietà simplettica S: abbiamo già osservato come le sue funzioni di Casimir siano quelle localmente costanti:

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g) = 0$$

per ogni g implica (dato che la forma ω è non degenere) che $df = 0$. Questo ci induce a considerare le algebre delle funzioni differenziabili delle varietà simplettiche come "semplici, anche se non nel senso algebrico del termine[2] ovvero, con locuzione più appropriata, *non degeneri.*

Possiamo anche, nella categoria delle algebre di Poisson, considerare le usuali costruzioni algebriche per produrre nuove algebre a partire da algebre date, ad esempio intersezioni, somme dirette e quozienti per ideali; dato

[2]Trattando oggetti di dimensione infinita è quasi impossibile imbattersi in algebre semplici nel senso algebrico del termine (senza ideali non banali, nel caso delle algebre di Lie): in effetti le algebre di funzioni che stiamo considerando sono "così grandi che debbono per forza contenere almeno le funzioni localmente costanti: se vogliamo questo è dovuto al fatto che sono anche algebre associative che posseggono l'identità, il che rende $\mathbb{R}$ una sottoalgebra in modo automatico; questo è del tutto analogo a quanto accade nel caso della teoria delle algebre di Von Neumann, nella quale i fattori, che giocano il ruolo delle algebre semplici, sono le algebre il cui centro è ridotto alle sole costanti.

che per noi sono essenziali gli esempi geometrici (le nostre algebre sono sempre algebre di funzioni) è bene tenere a mente come queste costruzioni nella categoria delle algebre si riverberano nella categoria degli spazi soggiacenti.

In generale, consideriamo una categoria concreta $\mathcal{C}$ (ad esempio la categoria degli insiemi, dei gruppi, delle varietà differenziabili) che contenga l'anello $\mathbb{K}$ come oggetto e il funtore $\mathcal{F}_{\mathbb{K}} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{A}_{\mathbb{K}}$ nella categoria delle $\mathbb{K}$-algebre associative e commutative che associa ad un oggetto C di $\mathcal{C}$ l'algebra $A(C)$ generata dai morfismi $\mathrm{Hom}(C, \mathbb{K})$ nella categoria $\mathcal{C}$; questo funtore è una equivalenza su una sottocategoria opportuna di $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}$: ad esempio, se $\mathcal{C}$ è la categoria degli spazi topologici di Hausdorff localmente compatti e $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ allora $\mathcal{F}$ è una equivalenza sulla categoria delle C*-algebre commutative con identità (teorema di Gel'fand–Naijmark). Il comportamento del funtore $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}$ rispetto alle operazioni possibili nella categoria $\mathcal{C}$ è ovviamente determinato da quello del funtore $\mathrm{Hom}(-, \mathbb{K})$. Il caso che più ci interessa è quello in cui $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\mathcal{C}$ è la categoria delle varietà differenziabili. In questo caso il funtore $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ assegna ad una varietà M l'algebra di Fréchet $C^\infty(M)$ e alla funzione differenziabile $f : M \longrightarrow N$ il morfismo $f^*(\varphi) = \varphi \circ f$ dall'algebra $C^\infty(N)$ all'algebra $C^\infty(M)$, e possiede le seguenti proprietà (cfr. [100], [12], [101]):

Teorema 2.1.4 *Siano M_1 e M_2 varietà differenziabili:*

(1) *Se $M_1 \subset M_2$ è una sottovarietà chiusa allora l'algebra $C^\infty(M_1)$ è un quoziente di $C^\infty(M_2)$ (modulo l'ideale delle funzioni nulle su N).*

(2) *$f : M_1 \longrightarrow M_2$ è una mappa differenziabile se e solo se $f^* : C^\infty(M_2) \longrightarrow C^\infty(M_1)$ è un morfismo di algebre.*

(3) *La categoria dei fibrati vettoriali su M_1 è equivalente alla categoria dei moduli proiettivi sull'anello $C^\infty(M_1)$.*

(4) *Se M_1 e M_2 sono varietà differenziabili allora $C^\infty(M_1 \times M_2)$ è isomorfa, come algebra topologica localmente convessa, a $C^\infty(M_1) \otimes C^\infty(M_2)$.*

Dato che lo spazio di Fréchet $C^\infty(M)$ è nucleare (cfr. [89, §III], [**?**, p. 351]) il prodotto tensoriale è ben definito in modo univoco.

Il prodotto tensoriale di due algebre di Poisson (commutative) A_1 e A_2, è definito in generale come la struttura di Poisson data dalle seguenti operazioni:

$$(a_1 \otimes a_2)(b_1 \otimes b_2) = (a_1 b_1) \otimes (a_2 b_2)$$

$$\{a_1 \otimes a_2, b_1 \otimes b_2\} = \{a_1, b_1\} \otimes a_2 b_2 + a_1 b_1 \otimes \{a_2, b_2\}$$

Si verifica immediatamente che con queste due operazioni lo spazio vettoriale $A_1 \otimes A_2$ è un'algebra di Poisson, che ovviamente si dice *prodotto tensoriale delle algebre di Poisson A e B*. Nel caso $A = C^\infty(M_1)$ e $B = C^\infty(M_2)$, per la (2) del teorema, possiamo considerare la struttura di Poisson sul prodotto $M_1 \times M_2$ definita dalle formule appena scritte come l'usuale prodotto di varietà di Poisson definito nel capitolo precedente.

Si noti che possiamo effettuare il prodotto tensoriale di un'algebra di Poisson A con un'algebra associativa o un'algebra di Lie; nel primo caso otteniamo ad esempio

$$\{a \otimes a', b \otimes b'\} = \{a, b\} \otimes a'b'$$

e nel secondo

$$\{a \otimes a', b \otimes b'\} = ab \otimes [a', b']$$

Torniamo ora a considerare algebre di Poisson qualsiasi su un campo $\mathbb{K}$ e osserviamo che l'identità di Leibniz ammette una formulazione in termini di derivazioni. Una idea è trarre spunto dal caso simplettico e provare a definire in generale i campi hamiltoniani.

Definizione 2.1.5 *Se $(A, \cdot, \{\,\})$ è una $\mathbb{K}$-algebra di Poisson, fissato un elemento $a \in A$, la funzione $\mathbb{K}$-lineare*

$$X_a : A \longrightarrow A$$

definita come

$$X_a(b) = \{a, b\}$$

si dice derivazione hamiltoniana *(o* campo hamiltoniano*) associata ad a.*

La terminologia è giustificata dal fatto che l'identità di Leibniz può, in questa notazione, esprimersi come

$$X_c(ab) = (X_c a)b + aX_c b$$

Abbiamo quindi una funzione $\mathbb{K}$-lineare

$$X : A \longrightarrow \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A)$$

dall'algebra di Lie $(A, \{\,\})$ all'algebra di Lie $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A)$ delle $\mathbb{K}$-derivazioni di $(A, \cdot)$. Si tratta di un morfismo di algebre di Lie, come segue da (ed equivale a) l'identità di Jacobi:

$$X_{\{a,b\}}c = \{\{a, b\}, c\} = \{a, \{b, c\}\} + \{b, \{c, a\}\} = X_a X_b c - X_b X_a c = [X_a, X_b]c$$

L'immagine di questa mappa X è dunque una $\mathbb{K}$-sottoalgebra di Lie dell'algebra delle derivazioni dell'algebra di Lie $(A, \cdot)$, composta dai campi hamiltoniani e che denotiamo $\mathrm{Ham}(A)$. Si osservi che non si tratta di un A-modulo (rispetto alla struttura associativa dell'algebra A), ma solo di un modulo di Lie per l'algebra di Lie $(A, \{\})$.

Un campo hamiltoniano X_a definisce anche una derivazione dell'algebra di Lie $(A, \{\})$, sempre per l'identità di Jacobi delle parentesi di Poisson:

$$X_a\{b, c\} = \{a, \{b, c\}\} = \{\{a, b\}, c\} - \{b, \{c, a\}\} = \{X_a b, c\} + \{b, X_a c\}$$

La derivazione X_a è interna, e in effetti l'operatore X è semplicemente la rappresentazione aggiunta *ad* per l'algebra di Lie $(A, \{\})$. In effetti esiste la successione esatta di algebre di Lie seguente:

$$0 \longrightarrow \operatorname{Cas} A \xrightarrow{i} A \xrightarrow{X} \operatorname{Ham} A \longrightarrow 0$$

ove i è l'inclusione.

Definizione 2.1.6 *Una funzione $\mathbb{K}$-lineare $D : A \longrightarrow A$ che sia una derivazione dell'algebra associativa $(A, \cdot)$ e allo stesso tempo una derivazione dell'algebra di Lie $(A, \{\})$ si dice* campo canonico*; la $\mathbb{K}$-algebra di Lie dei campi canonici si denota con* $\operatorname{Can}(A)$.

Ovviamente $\operatorname{Ham}(A)$ è una sottoalgebra di Lie di $\operatorname{Can}(A)$: in realtà ne è un ideale di Lie:

$$[X_a, D] = X_a D - D X_a = X_a D - X_{Da} - X_a D = -X_{Da}$$

Così come $\operatorname{Ham}(A)$, nemmeno $\operatorname{Can}(A)$ è un A-modulo.

Queste definizioni astratte sono la parafrasi algebrica di quanto già spiegato nel caso $A = C^\infty(M)$ con M varietà di Poisson: in particolare nel caso simplettico ha luogo l'isomorfismo di fibrati indotto dalla forma simplettica $\omega^\# : T^*S \longrightarrow TS$, per mezzo del quale possiamo scrivere $X_f = \omega^\# df$ e che, per tramite di questo isomorfismo, lo spazio dei campi hamiltoniani corrisponde allo spazio delle 1–forme esatte e lo spazio dei campi canonici allo spazio delle 1–forme chiuse; dunque $\operatorname{Can}(S)/\operatorname{Ham}(S) \cong H^1(S)$ (primo gruppo della coomologia di de Rham[3]).

Nel caso generale $\operatorname{Can}(A)/\operatorname{Ham}(A)$ è un'algebra di Lie che misura "quanti campi canonici non hamiltoniani esistono nell'algebra di Poisson A; ad esempio nel caso di un'*algebra di Poisson nulla*, cioè tale che le sue parentesi di Poisson siano identicamente nulle (e che quindi si riduce ad un'algebra associativa) abbiamo ovviamente che $\operatorname{Ham}(A) = 0$, mentre $\operatorname{Can}(A) =$

[3]La determinazione dell'algebra di Lie $\operatorname{Can}(A)/\operatorname{Ham}(A)$ è menzionata da Krasil'ščik e Vinogradov col termine di "teorema fondamentale della Meccanica: in effetti lo studio di questo invariante per le algebre di Poisson risale al loro lavoro, cfr. [60], [58].

$\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A)$. Si noti inoltre che $\mathrm{Can}(A)/\,\mathrm{Ham}(A)$ è una sottoalgebra di Lie dell'algebra $\mathrm{Der}_{Lie}(A)/\,\mathrm{Ham}(A)$, che può anche vedersi come $H^1(A)$ (coomologia di Chevalley–Eilenberg dell'algebra di Lie A a coefficienti nella rappresentazione banale, cfr. [19, §XIII-2], [41, §1.4]): ad esempio se l'algebra di Lie $(A, \{\,\})$ è semisemplice allora $H^1(A) = 0$ (per il primo lemma di Whitehead, cfr. [84, §19]) e, *a fortiori*, $\mathrm{Can}(A) = \mathrm{Ham}(A)$.

Consideriamo l'altro esempio fondamentale di struttura di Poisson, vale a dire le parentesi di Lie–Poisson: il calcolo dell'invariante $\mathrm{Can}(\mathrm{Sym}(\mathfrak{g}^*))/\,\mathrm{Ham}(\mathrm{Sym}(\mathfrak{g}^*))$ è relativamente semplice in questa forma intrinseca: si trova che questa algebra di Lie quoziente è esattamente il primo gruppo di coomologia dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ a coefficienti nella rappresentazione banale $\mathbb{K}$ (cfr. [60] per una verifica esplicita).

L'operatore $X : A \longrightarrow \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A)$ precedentemente introdotto ci consente di descrivere la struttura di Poisson su un'algebra ma non di caratterizzarla completamente: per farlo dobbiamo provare a generalizzare l'equazione $X = \omega^{\#} \circ d$ dalle varietà simplettiche al contesto generale delle algebre di Poisson, facendo quindi intervenire il calcolo differenziale: apriamo dunque una digressione su questo formalismo nelle algebre associative commutative.

2.2 Calcolo differenziale nei moduli

Consideriamo un'algebra associativa, commutativa e con unità A su un campo $\mathbb{K}$ fissato: gran parte di quel che diremo potrebbe adattarsi, senza grandi cambiamenti, al caso di algebre su un anello commutativo $\mathbb{K}$, e, utilizzando le cocatene di Hochschild in luogo del complesso di de Rham (l'analogo della coomologia di de Rham nel caso non commutativo è l'omologia ciclica, cfr. [68]), al caso non commutativo; ma il nostro obiettivo è il caso in cui A sia un'algebra di funzioni e $\mathbb{K}$ il campo reale o complesso; inoltre in queste ultime ipotesi la teoria ha un carattere più naturale ed esistono delle funtorialità che non si danno nel caso generale.

Ad esempio la costruzione del modulo delle derivazioni è funtoriale solo nel caso commutativo: se E un A-modulo, il modulo delle derivazioni di A in E è l'A-modulo

$$\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A, E) = \{X \in \hom_{\mathbb{K}}(A, E) \,|\, X(ab) = X(a)b + aX(b)\}$$

delle mappe K-lineari che si comportano rispetto al prodotto dell'algebra secondo l'identità di Leibniz. Si tratta di un A-modulo rispetto all'ovvia azione $(aX)(b) = aXb$.

Il passaggio da E a $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A, E)$ definisce un funtore controvariante nella categoria dei moduli su un'algebra *commutativa*.

Il caso di particolare interesse è $E = A$: allora denotiamo il modulo delle derivazioni semplicemente con $\operatorname{Der} A$; ovviamente si tratta di una $\mathbb{K}$-algebra di Lie rispetto alle parentesi

$$[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X$$

Come ben noto, se $A = C^\infty(M)$ è l'algebra delle funzioni differenziabili di una varietà differenziabile di dimensione finita allora $\operatorname{Der} A$ è isomorfo al modulo delle sezioni del fibrato tangente, vale a dire allo spazio dei campi di vettori.

Definizione 2.2.1 *Un* modulo differenziale *su A è una coppia (D, δ) ove D è un A-modulo e $\delta : A \longrightarrow D$ è una derivazione tale che l'A-modulo generato da* $\operatorname{im} \delta$ *coincida con D.*

La condizione $A \operatorname{im} \delta = D$ rende la categoria dei moduli differenziali una sottocategoria propria della categoria di tutti i moduli (altrimenti, con $\delta = 0$ ogni modulo sarebbe banalmente un modulo differenziale).

Un morfismo fra due moduli differenziali (D, δ) e (E, ε) è un omomorfismo di A-moduli $\mu : D \longrightarrow E$ tale che il diagramma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\delta"] & E \\ D \arrow[ur, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

sia commutativo. Rispetto a questi morfismi i moduli differenziali formano una categoria.

Abbiamo due esempi fondamentali di moduli differenziali, che provengono in realtà dalla Geometria: i differenziali di Kähler e i campi hamiltoniani.

I differenziali di Kähler si possono costruire come un oggetto universale in una categoria di A-moduli: noi li caratterizzeremo con la seguente proprietà universale

Definizione 2.2.2 *Se $\mathcal{C}$ è una categoria di A-moduli differenziali, un* modulo differenziale universale *di $\mathcal{C}$ è l'oggetto iniziale di $\mathcal{C}$. Il modulo differenziale universale nella categoria di tutti gli A-moduli differenziali si dice* modulo dei differenziali di Kähler *di A.*

Ovviamente, se il modulo differenziale universale esiste in una certa categoria allora è unico. L'esempio che ci ispira è il seguente:

Teorema 2.2.3 *Nella categoria dei moduli differenziali proiettivi sull'algebra $A = C^\infty(M)$ delle funzioni differenziabili di una varietà differenziabile M il modulo differenziale universale è lo spazio delle 1-forme differenziali (differenziali di de Rham).*

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo un modulo differenziale proiettivo D su A: poiché è proiettivo esiste un fibrato vettoriale $E \longrightarrow M$ del quale D è lo spazio delle sezioni. Inoltre D è un modulo differenziale, il che vuol dire che esiste una mappa $\delta : A \longrightarrow D$ che soddisfi l'identità di Leibniz; se definiamo la mappa

$$\Phi : \Omega^1(M) \longrightarrow D$$

come

$$(*) \qquad \Phi(df) = \delta f$$

estendendo per A-linearità abbiamo un morfismo di moduli differenziali, per definizione. Inoltre qualsiasi altro morfismo di moduli differenziali da $\Omega^1(M)$ a D deve soddisfare la (*) e quindi coincidere con Φ.

QED

I differenziali di Kähler sono un A-modulo differenziale (Ω_A, d) tale che, per ogni A-modulo differenziale (D, δ), esista un unico morfismo $\mu : \Omega_A \longrightarrow D$ di A-moduli differenziali tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "d"'] & D \\ \Omega_A \arrow[ur, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

Teorema 2.2.4 *Nella categoria di tutti gli A-moduli differenziali il modulo dei differenziali di Kähler esiste.*

DIMOSTRAZIONE: Esibiamo esplicitamente l'oggetto universale richiesto considerando la funzione di moltiplicazione dell'algebra A

$$m : A \otimes A \longrightarrow A$$

$(m(a, b) = ab)$ e l'ideale $I = \ker m$. Allora possiamo costruire il quoziente I/I^2 e la mappa $f : A \longrightarrow I$ definita come

$$f(a) = a \otimes 1 - 1 \otimes a$$

Si tratta di una derivazione, come è ovvio, di A nel modulo I, e possiamo comporla con la proiezione $I \longrightarrow I/I^2$ sul quoziente per ottenere una derivazione $d \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A, I/I^2)$. Cioè $(I/I^2, d)$ è un modulo differenziale.

Ora, se (D, δ) è un modulo differenziale qualsiasi, possiamo considerare il morfismo di moduli $\mu : I/I^2 \longrightarrow D$ definito come

$$\mu(a \otimes 1 - 1 \otimes a) = \delta(a)$$

e che è, per definizione, un morfismo di moduli differenziali; che sia l'unico morfismo di moduli differenziali fra I/I^2 e D è ovvio per costruzione di I/I^2.

QED

Notiamo che per dimostrare l'esistenza di Ω_A si potrebbe semplicemente considerare il primo modulo di omologia di Hochschild di A a coefficienti nella rappresentazione aggiunta $H^1(A, A)$ (cfr. [68]) e mostrare che soddisfa alla proprietà universale che definisce i differenziali di Kähler.

È ben noto (cfr. [68]) che i differenziali di Kähler possono caratterizzarsi come un oggetto nella categoria di tutti gli A-moduli, precisamente come una rappresentazione del funtore $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A, -)$: cioè

$$\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A, D) = \hom_A(\Omega_A, D)$$

per ogni A-modulo D: in altri termini le derivazioni $d \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A, D)$ corrispondono ai morfismi $\mu : \Omega_A \longrightarrow D$ costruiti nella dimostrazione del teorema precedente.

Osserviamo che, per universalità rispetto al funtore $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A, -)$, la funzione $d : A \longrightarrow \Omega_A$ soddisfa alle

(1) $d(ab) = bda + adb$

(2) $d(1) = 0$

I differenziali di Kähler sono stati costruiti nella categoria di tutti i moduli: restringendoci ad una sottocategoria potrebbe non esistere un tale oggetto universale (cioè i differenziali di Kähler potrebbero non appartenere, come modulo, alla sottocategoria); nel caso generale dovremo quindi cercare un nuovo oggetto iniziale, nella sottocategoria, ai moduli differenziali, cioè un modulo dei differenziali relativo alla sottocategoria, come nel caso dei moduli proiettivi su $A = C^\infty(M)$.

Si noti che in questo caso, il modulo dei differenziali di Kähler è molto più vasto di quello dei differenziali di de Rham che, come abbiamo detto, costituiscono l'oggetto universale voluto. Infatti il modulo dei differenziali di Kähler su $C^\infty(M)$ è costituito da tutte le sezioni del fibrato cotangente, non semplicemente da quelle differenziabili; in effetti nella costruzione universale dei differenziali non abbiamo fatto in alcun modo intervenire la topologia di Fréchet, e quindi, riportata al caso geometrico, questa costruzione ci fornirebbe tutte le sezioni *insiemistiche* del fibrato cotangente.

Convenzione. *Supporremo nel séguito di lavorare nella categoria di tutti gli A-moduli differenziali, e quindi per noi il modulo differenziale universale sarà quello dei differenziali di Kähler: gli stessi risultati che daremo si ottengono in categorie diverse di moduli differenziali purché siano dotate di un oggetto iniziale.*

L'altro esempio per noi fondamentale di modulo differenziale è il *modulo hamiltoniano di un'algebra di Poisson*, che per definizione è l'A-modulo $\mathcal{H}_A$

generato dai campi hamiltoniani, che abbiamo già considerato a partire da un'algebra di Poisson $(A, \cdot, \{\})$ e dall'operatore $\mathbb{K}$-lineare

$$X : A \longrightarrow \operatorname{Der} A$$

ponendo $(Xf)(g) = \{f, g\}$. L'identità di Leibniz può vedersi come l'asserzione che il modulo $(\mathcal{H}_A, X)$ è un modulo differenziale.

Ad esempio, se l'algebra di Poisson A è non degenere, cioè la struttura di Poisson è simplettica, allora $\mathcal{H}_A = \operatorname{Der} A$ è precisamente il duale di Ω_A.

Consideriamo ora l'A-modulo $\operatorname{Der} A$: per la proprietà universale dei differenziali di Kähler:

$$\operatorname{Der} A = \hom_A(\Omega_A, A) = \Omega_A^*$$

(nella categoria degli A-moduli), quindi esiste un accoppiamento A-bilineare

$$\langle , \rangle : \operatorname{Der} A \times \Omega_A \longrightarrow A$$

definito come (se $X \in \operatorname{Der} A$ e $\omega \in \Omega_A$)

$$\langle X, \omega \rangle = X(\omega)$$

In generale non sarà vero il viceversa, cioè avremo soltanto $\Omega_A \subset \Omega_A^{**} = (\operatorname{Der} A)^*$. Tuttavia ha senso considerare gli A-moduli

$$\Omega_A^k := \bigwedge\nolimits_A^k \Omega_A$$

(ottenuti passando alle potenze esterne di Ω_A come A-modulo). Naturalmente la funzione $d : A \longrightarrow \Omega_A$ si estende in modo unico all'algebra esterna $d : \Omega_A^k \longrightarrow \Omega_A^{k+1}$ come

$$\begin{aligned} \langle d\omega, X_1 \wedge ... \wedge X_k \rangle = &\sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} X_i(\langle \omega, X_1 \wedge ... \wedge \widehat{X_i} \wedge ... \wedge X_k \rangle) + \\ &+ \sum_{i<j}^{1...k} (-1)^{i+j} \langle \omega, [X_i, X_j] \wedge ... \wedge \widehat{X_i} \wedge ... \widehat{X_j} \wedge ... \wedge X_k \rangle \end{aligned}$$

Le verifiche delle

(1) $d \circ d = 0$

(2) $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^r \omega_1 \wedge d\omega_2$ (se $\omega_2 \in \Omega_A^r$)

(3) d è $\mathbb{K}$-lineare

non presentano difficoltà, essendo le stesse che si danno nel caso del differenziale esterno fra forme differenziali su una varietà (cfr. [1]). Osserviamo che l'algebra esterna sul modulo Ω_A

$$\Omega(A) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \bigwedge\nolimits_A^n \Omega_A$$

è un'algebra associativa differenziale graduata.

Conviene anche definire, per $X \in \mathrm{Der}\, A$, l'*operatore di contrazione*

$$i_X : \Omega_A^{k+1} \longrightarrow \Omega_A^k$$

come

$$\langle i_X(\omega), X_1 \wedge ... \wedge X_k \rangle = \langle \omega, X \wedge X_1 \wedge ... \wedge X_k \rangle$$

Si tratta evidentemente di un operatore A-lineare, che permette di definire la *derivata di Lie* di una forma $\omega \in \Omega_A^k$ rispetto ad una derivazione $X \in \mathrm{Der}\, A$:

$$\mathcal{L}_X : \Omega_A^k \longrightarrow \Omega_A^k$$

con la formula di E.Cartan

$$\mathcal{L}_X \omega = i_X d\omega + d i_X \omega$$

Di nuovo la verifica delle proprietà

$$\mathcal{L}_{[X_1, X_2]} = [\mathcal{L}_{X_1}, \mathcal{L}_{X_2}]$$

$$i_{[X_1, X_2]} = [\mathcal{L}_{X_1}, i_{X_2}]$$

non differisce dalle usuali dimostrazioni che si danno per le varietà.

In questo modo, abbiamo il calcolo di Cartan nella categoria dei moduli, basandoci sull'esistenza di un elemento universale per il funtore $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A, -)$ in questa categoria.

Esiste una immediata generalizzazione di questo calcolo secondo le seguenti linee: fissiamo un A-modulo differenziale (D, δ); allora, dato che Ω_A è l'oggetto iniziale nella categoria dei moduli differenziali, esiste un morfismo naturale di moduli differenziali

$$\mu : \Omega_A \longrightarrow D$$

che è suriettivo per definizione, e quindi possiamo estendere δ alle potenze esterne di D, come

$$\delta(a\delta a_1 \wedge \delta a_2 \wedge \cdots \wedge \delta a_n) = \delta a \wedge \delta a_1 \wedge \delta a_2 \wedge \cdots \wedge \delta a_n$$

ottenendo in questo modo un complesso $\bigwedge^k D$ la cui coomologia possiamo chiamare *coomologia di de Rham* del modulo D.

Per un modulo differenziale (D, δ) qualsiasi possiamo ripetere quanto abbiamo detto per i differenziali di Kähler: ad esempio esiste una forma bilineare

$$\langle , \rangle : D \times \operatorname{Der} A \longrightarrow A$$

definita come

$$\langle a\delta b, X\rangle = aX(b)$$

che si estende in grado qualsiasi. Tuttavia l'operatore di contrazione indotto da questa forma bilineare non è non degenere; perché lo sia dobbiamo restringere la classe dei campi sui quali effettuare la contrazione considerando lo spazio

$$D_\delta = \{X \in \operatorname{Der} A \,|\, \forall c \in \ker\delta \quad X(c) = 0\}$$

che è un sotto-modulo di $\operatorname{Der} A$ e anche una sotto-algebra di Lie; è semplicemente lo spazio delle derivazioni che "vedono come costanti gli elementi di $\ker\delta$. Possiamo allora definire un operatore di *contrazione*

$$i : D_\delta \times D \longrightarrow A$$

come

$$i_X \delta a = X(a)$$

ed estenderlo per A-linearità ad una forma bilineare di A-moduli.

Notiamo infatti che per ogni $a \in A$ abbiamo $\delta a = \mu da$ (proprietà universale dei differenziali di Kähler), e quindi che possiamo valutare una derivazione $X \in D_\delta$ su un elemento di D, esattamente come si fa per i differenziali di Kähler; si noti che $\ker\delta$ non è un A-modulo, ma una $\mathbb{K}$-sottoalgebra di A, in quanto

$$\delta z = \delta z' = 0 \implies \delta(zz') = 0$$

Utilizzando questa contrazione e il differenziale δ del modulo D possiamo anche definire una *D-derivata di Lie* come

$$\mathcal{L}_X \eta = i_X \delta\eta + \delta i_X \eta$$

per $X \in D_\delta$ e $\eta \in D$. Chiaramente la contrazione si estende in modo immediato alle potenze esterne del modulo D come

$$i_X(a\delta a_1 \wedge \cdots \wedge \delta a_n) = aX(a_1)\delta a_2 \wedge \cdots \wedge \delta a_n$$

in modo da soddisfare le usuali proprietà.

Si osservi che il morfismo universale μ (tale che $\mu d = \delta$) si può naturalmente estendere alle algebre graduate esterne, tenendo conto del segno:

$$\mu(\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_n) = (-1)^n \mu(\omega_1) \wedge \mu(\omega_2) \cdots \wedge \mu(\omega_n)$$

ove $\omega_i \in \Omega_A$.

Un esempio particolarmente significativo si ha quando D è un sottomodulo di $\operatorname{Der} A$: fissiamo una derivazione $\delta : A \longrightarrow \operatorname{Der} A$: allora resta indotta una mappa $\mu : \Omega_A \longrightarrow \operatorname{Der} A$ (per la proprietà universale dei differenziali) tale che $\mu \circ d = \delta$. Naturalmente questo morfismo non sarà in generale né suriettivo né iniettivo; se è suriettivo si tratta evidentemente di un isomorfismo di moduli.

Notiamo infine che questo calcolo differenziale per i moduli differenziali può ricondursi all'usuale calcolo differenziale con derivazioni e differenziali di Kähler semplicemente cambiando l'anello degli scalari dell'algebra: infatti

Proposizione 2.2.5 *Se* $A_\delta = A \otimes_{\mathbb{K}} \ker \delta$ *allora* $\Omega_{A_\delta} = D$ *e* $\operatorname{Der} A_\delta = D_\delta$.

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo la mappa

$$\Xi : D_\delta \longrightarrow \operatorname{Der} A_\delta$$

definita come ($X \in \operatorname{Der} A_\delta$, $a \otimes c \in A_\delta$)

$$\Xi(X)(a \otimes c) := X(a) \otimes c$$

Evidentemente si tratta di un isomorfismo di A_δ-moduli e, per la proprietà universale dei differenziali di Kähler su A_δ abbiamo che

$$D_\delta = \operatorname{Der} A_\delta = \hom_{A_\delta}(\Omega_{A_\delta}, A_\delta)$$

sicché $\Omega_{A_\delta} = D$.

QED

Ad esempio se A è un'algebra di Poisson e $D = \mathcal{H}_A$ allora l'algebra A_δ è di Poisson (prodotto tensoriale di A con l'algebra di Poisson nulla $\ker \delta = \operatorname{Cas}(A)$) e abbiamo che un suo elemento $a \otimes c$ è di Casimir se e solo se

$$0 = \{a \otimes c, b \otimes e\} = \{a, b\} \otimes ce$$

cioè se e solo se $a \in \operatorname{Cas}(A)$, il che vuol dire che $a \otimes c$ è una costante (l'anello degli scalari è ora $\operatorname{Cas}(A)$) cioè che la struttura di Poisson è simplettica.

2.3 Connessioni e curvatura

Fin qui abbiamo delineato quello che potrebbe chiamarsi *calcolo differenziale di Cartan* sulle algebre associative: vogliamo spingerci più in là e considerare il *calcolo di Ricci*, avendo sempre in mente le nozioni che si danno sulle varietà differenziabili.

Definizione 2.3.1 *Se (D, δ) è un A-modulo differenziale, una D-*connessione *in un A-modulo E è un operatore K-lineare*

$$\nabla : E \longrightarrow E \otimes_A D$$

che soddisfi alla identità di Leibniz

$$\nabla(ae) = a\nabla e + e \otimes \delta a$$

per $a \in A$ ed $e \in E$.

Ovviamente la connessione avrà, in generale, valori nel modulo $E \otimes D$ e sarà non solo $\mathbb{K}$-lineare, ma $\ker D$-lineare, dato che, se $z \in \ker \delta$ allora

$$\nabla(zs) = z\nabla s + s \otimes \delta z = z\nabla s$$

Si noti inoltre che, nel caso $D = \Omega_A$ del modulo dei differenziali ritroviamo il classico concetto di connessione: chiameremo le Ω_A-connessioni semplicemente *connessioni* nel modulo E; ovviamente in questo caso $A_\delta = A$. Per la proprietà universale dei differenziali, ogni connessione ∇ dà luogo ad una D-connessione $\tilde{\nabla}$ per ogni modulo differenziale (D, δ) semplicemente per composizione: se $\nabla : E \longrightarrow E \otimes \Omega^1_A$ allora $\tilde{\nabla} = (I \otimes \mu)\nabla$ è una D-connessione in E ove $I : E \longrightarrow E$ è la mappa identica.

Proposizione 2.3.2 *L'insieme delle D-connessioni su un modulo E è uno spazio affine sul campo $\mathbb{K}$.*

DIMOSTRAZIONE: Se ∇ e ∇' sono D-connessioni in E allora

$$(\nabla - \nabla')(ae) = a\nabla e + e \otimes \delta a - a\nabla' e - e \otimes \delta a = a(\nabla - \nabla')(e)$$

Questo vuol dire che la differenza di connessioni è un endomorfismo del fibrato E e quindi lo spazio delle connessioni è uno spazio affine il cui spazio vettoriale tangente in ciascun punto è $\mathrm{End}(E)$.

QED

Un A-modulo E è ovviamente anche un A_δ-modulo rispetto all'azione $(a \otimes c) \cdot e = (ac) \cdot e$; possiamo allora formulare il seguente

Esempio. Il modulo libero $E = A_\delta^n$ possiede sempre una D-connessione: se $(e_1, ..., e_n)$ è una A_δ-base di E, allora, per $a \in A_\delta$, definiamo

$$\nabla(ae_i) = e_i \otimes \delta a$$

Estendendo per additività si ottiene ovviamente una D-connessione.

Possiamo agevolmente generalizzare questo esempio al caso di un modulo proiettivo (finitamente generato) sull'algebra A_δ: un modo semplice è ricordare che un modulo proiettivo è addendo diretto di un modulo libero. Quindi se E è proiettivo abbiamo che $E \oplus F = A_\delta^n$, sicché possiamo costruire una connessione ∇ in A_δ^n. Allora consideriamo la composizione

$$E \xrightarrow{i} A_\delta^n \xrightarrow{\nabla} A_\delta^n \otimes E \xrightarrow{p\otimes I} E \otimes D$$

ove i è l'immersione dell'addendo diretto E in A_δ^n e $I : E \longrightarrow E$ è la mappa identica. Ovviamente si tratta di una connessione, che si dice *connessione di Levi-Civita*, per l'ovvia analogia che esiste con la ben nota costruzione della Geometria Riemanniana.

Dunque ogni modulo proiettivo (finitamente generato) possiede una D-connessione naturalmente definita in termini della derivazione $\delta \in \mathrm{Der}(A, D)$.

Teorema 2.3.3 *Un modulo E possiede una D-connessione se e solo se E è A_δ-proiettivo.*

DIMOSTRAZIONE: Sappiamo già che un modulo proiettivo ammette una D-connessione. Viceversa, se $\nabla : E \longrightarrow E \otimes D$ è una connessione, dimostriamo che esiste una sezione A_δ-lineare al morfismo $m : E \otimes A_\delta \longrightarrow E$ dato dalla moltiplicazione ($m(a \otimes c, e) = (ac)e$), il che equivale alla proiettività di E: consideriamo la successione

$$0 \longrightarrow E \otimes_{A_\delta} D \xrightarrow{\Delta} A_\delta \otimes_{\ker\delta} E \xrightarrow{m} E \longrightarrow 0$$

ove abbiamo posto

$$\Delta(e \otimes \delta a) = 1 \otimes ae - a \otimes e$$

Questa successione di $\mathbb{K}$-spazi vettoriali non solo è esatta, come è ovvio verificare ma si spezza per tramite della mappa $u : E \longrightarrow A_\delta \otimes E$ di immersione $u(e) = 1 \otimes e$. Ora data ∇ possiamo associarle una sezione $\sigma : E \longrightarrow A \otimes E$ per mezzo della

$$\sigma(e) = 1 \otimes e + \Delta(\nabla e)$$

Si tratta di una mappa ben definita che è A_δ-lineare dato che

$$\begin{aligned}\sigma(ae) &= 1 \otimes ae - \Delta(a\nabla e) - \Delta(e \otimes \delta a)\\ &= 1 \otimes ae - \Delta(a\nabla e) - 1 \otimes ae + a \otimes e\\ &= a \otimes e - a\Delta(\nabla e) = a\sigma(e)\end{aligned}$$

Abbiamo cioè mostrato l'esistenza di una sezione alla moltiplicazione $m : A_\delta \otimes E \longrightarrow E$, il che è possibile solo se E è A_δ-proiettivo.

QED

Questo teorema può più semplicemente vedersi come conseguenza del teorema di Kaplanskij, secondo il quale un modulo è proiettivo se e solo se è localmente libero.

Ora consideriamo il concetto di curvatura: in primo luogo notiamo che una D-connessione induce una famiglia di operatori

$$\nabla : E \otimes \bigwedge^n D \longrightarrow E \otimes \bigwedge^{n+1} D$$

semplicemente ponendo

$$\nabla(s \otimes P) = \nabla s \otimes P + (-1)^{\deg P} s \otimes \delta P$$

ove conveniamo che $\bigwedge^0 D = A$ e $\bigwedge^n D = \bigwedge_A^n D$ sono le potenze esterne del modulo D (che è generato da $\operatorname{im}\delta$).

Definizione 2.3.4 *Data una D-connessione ∇, la sua* curvatura $R_\nabla : E \longrightarrow E \otimes \bigwedge^2 D$ *è definita come $R_\nabla = \nabla \circ \nabla$. Se $R_\nabla = 0$, la D-connessione si dice* piatta*.*

Se osserviamo che, per $a \in A$ e $e \in E$:

$$R_\nabla(ae) = \nabla(a\nabla e + e \otimes \delta a) = aR_\nabla e - \nabla e \otimes \delta a + \nabla e \otimes \delta a - e \otimes \delta^2 a = aR_\nabla e$$

possiamo concluderne che

Proposizione 2.3.5 *La curvatura è A-lineare*

Notiamo che una D-connessione su E induce una D-connessione $\overline{\nabla} : \operatorname{End}(E) \longrightarrow \operatorname{End}(E) \otimes D$ su $\operatorname{End} E$ nel modo seguente: se $\varphi : E \longrightarrow E$ è A-lineare

$$\overline{\nabla}\varphi = [\nabla, \varphi] = \nabla \circ \varphi - \varphi \circ \nabla$$

In effetti si tratta di un operatore $\mathbb{K}$-lineare tale che

$$\overline{\nabla}(a\varphi) = \nabla(a\varphi) - a\varphi\nabla = a\nabla\varphi + \varphi \otimes \delta a - a\varphi\nabla = a\overline{\nabla}\varphi + \varphi \otimes \delta a$$

Il seguente facile calcolo:

$$\overline{\nabla} R_\nabla = [\nabla, R_\nabla] = \nabla R_\nabla - R_\nabla \nabla = \nabla\nabla^2 - \nabla^2\nabla = 0$$

conduce al

Teorema (IDENTITÀ DI BIANCHI) **2.3.6** $[\nabla, R_\nabla] = 0$

Dato che una D-connessione ha luogo solo in un modulo proiettivo, e dato che la localizzazione di un modulo proiettivo è un modulo libero, possiamo scrivere, anche in questo contesto algebrico, una connessione in "coordinate, nel modo seguente: se E è un modulo A_δ-libero (e.g. $E = A_\delta^n$) allora una D-connessione $E \longrightarrow E \otimes_A D$ è determinata da una matrice a coefficienti in D, i.e. da un elemento $\nabla \in \mathrm{End}_A(E) \otimes D$. Se

$$E = e_1 A_\delta \oplus \cdots \oplus e_n A_\delta$$

allora

$$\nabla e_i = \sum_j e_j \otimes \Gamma_{ji}$$

La matrice $\Gamma = ((\Gamma_{ij}))$ determina la connessione: se $e \in E$ si scrive rispetto alla base (e_i) come (gli a_i saranno della forma $f_i \otimes c_i$ ove $f_i \in A$ e $c_i \in \ker\delta$)

$$e = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$$

allora

$$\nabla e = \sum_i a_i \nabla e_i + \sum_i e_i \otimes \delta a_i = \sum_i e_i \otimes \left(\delta a_i + \sum_j a_i \Gamma_{ji} \right)$$

Cioè la matrice Γ non si comporta come un tensore, se non a meno di differenziali esatti.

L'esempio precedente si estende facilmente al caso di un modulo A_δ-proiettivo, utilizzando, ad esempio, il fatto che la localizzazione di ogni tale modulo dà luogo ad un modulo A_δ-libero, o più semplicemente il fatto che un modulo proiettivo è addendo diretto di un modulo libero.

Teorema (EQUAZIONE DI STRUTTURA) **2.3.7** *Se E è un A_δ-modulo proiettivo e ∇ una D-connessione in E allora*

$$R_\nabla = \Gamma \wedge \Gamma - \delta\Gamma$$

ove $\Gamma \wedge \Gamma$ è il prodotto di matrici (rispetto al prodotto $\wedge$) nel modulo D e $\delta\Gamma = ((\delta\Gamma_{ij}))$.

DIMOSTRAZIONE: Utilizzando le notazioni precedenti si trova che

$$\begin{aligned}\nabla^2 e_i &= \sum_j \nabla\left(e_j \otimes \Gamma_{ji}\right) = \sum_j \nabla e_j \wedge \Gamma_{ji} - \sum_j e_j \otimes \delta\Gamma_{ji} \\ &= \sum_{j,k} e_k \otimes \Gamma_{kj} \wedge \Gamma_{ji} - \sum_j e_j \otimes \delta\Gamma_{ji}\end{aligned}$$

QED

Osserviamo che un modulo proiettivo E finitamente generato, in quanto addendo diretto di un modulo libero (finitamente generato) A_δ^n è completamente determinato da un operatore (di proiezione) $P \in \mathrm{End}_A(A_\delta^n)$ idempotente ($P^2 = P$) la cui immagine sia esattamente E: ovviamente

$$A_\delta^n = \mathrm{im}\, P \oplus \mathrm{im}(I - P)$$

e quindi anche $\mathrm{im}(I - P)$ è un modulo proiettivo. Ne segue che possiamo definire per questi moduli la *traccia*

$$\mathrm{Tr} : \mathrm{End}_{A_\delta}(E) \longrightarrow A_\delta$$

come la traccia dell'operatore P.

Proposizione 2.3.8 *Se E è un A_δ-modulo proiettivo finitamente generato allora il diagramma*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{End}_A(E) \otimes_A D^k \arrow[r, "\overline{\nabla}"] \arrow[d, "\mathrm{Tr} \otimes \mathbb{I}"'] & \mathrm{End}_A(E) \otimes_A D^{k+1} \arrow[d, "\mathrm{Tr} \otimes \mathbb{I}"] \\
D^k \arrow[r, "\delta"'] & D^{k+1}
\end{tikzcd}$$

è commutativo.

Dimostrazione: Basta dimostrare il teorema per i moduli liberi: in questo caso procediamo per induzione sulla dimensione di E e quindi l'unico caso non banale è quello $E = A_\delta$, ove

$$\nabla(a) = aP + \delta a$$

per qualche $P \in D$. Ora, sia δ che $\overline{\nabla} = [\nabla, -]$ sono $\bigwedge^k D$-lineari come pure Tr (infatti $\mathrm{End}_A(A) \otimes_A \bigwedge^k D = \bigwedge^k D$) e quindi basta limitarsi al grado $k = 0$:

$$[\nabla, a] = \nabla(a) - aP = aP + \delta a - aP = \delta a$$

QED

Se poniamo

$$ch(E, \nabla) := \mathrm{Tr}\, \exp R_\nabla$$

(con exp si intende la serie formale dell'esponenziale) allora, per le due proposizioni precedenti:

$$\delta(\mathrm{Tr} \exp R_\nabla)) = [\nabla, \exp R_\nabla] = 0$$

e quindi

Proposizione 2.3.9 *La componente omogenea di grado $2n$ di $ch(E, \nabla)$ ha differenziale nullo in $\bigwedge^{2n} D$.*

Dunque $ch(E, \nabla)$ genera una classe di coomologia di de Rham (rispetto al complesso (D, δ)

$$ch(E) \in \prod_{n \geq 0} H^{2n}_{dR}(D)$$

che si dice *carattere di Chern* dell'A_δ-modulo E.

Teorema 2.3.10 *Il carattere di Chern di un modulo E non dipende dalla connessione ∇ che figura nella definizione di $ch(E, \nabla)$.*

DIMOSTRAZIONE: Si tratta di un argomento ben noto: se ∇_1 e ∇_2 sono D-connessioni su E e se $\tilde{\nabla}_1$ è l'estensione di ∇_1 all'$A[t]$-modulo $E[t] = E \otimes_A A_\delta[t]$ allora

$$\tilde{\nabla} := t\tilde{\nabla}_1 + (1-t)\tilde{\nabla}_2$$

è una connessione in $E[t]$. Le proiezioni

$$\begin{aligned} P_0 : A_\delta[t] &\longrightarrow A_\delta \\ t &\mapsto 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} P_1 : A_\delta[t] &\longrightarrow A_\delta \\ t &\mapsto 1 \end{aligned}$$

inducono gli isomorfismi

$$(P_i)_* : H(A_\delta[t], D[t]) \xrightarrow{\cong} H(A_\delta, D)$$

(ove $D[t]$ è l'$A_\delta[t]$-modulo differenziale $D \otimes_{A_\delta} A[t]$) e ovviamente

$$(P_i)_*(ch(E[t], \tilde{\nabla}_i)) = ch(E, \nabla_i)$$

Ma $(P_0)_*^{-1}(P_1)_* : H(A_\delta, D) \longrightarrow H(A_\delta, D)$ è l'identità e quindi

$$ch(E, \nabla_0) = ch(E, \nabla_1)$$

QED

Esiste, nel caso $D = \Omega_A$, un algoritmo canonico per produrre connessioni, basato sulla considerazione di derivate covarianti, che ammette una generalizzazione nel nostro caso.

Definizione 2.3.11 *Se E è un A-modulo, una D*-derivata covariante *in E è un operatore $\mathbb{K}$-lineare*

$$\mathbf{D} : D_\delta \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)$$

tale che, se $X \in D_\delta$, $a \in A$ e $e \in E$:

$$\mathbf{D}_X(ae) = a\mathbf{D}_X e + i_X(\delta a)e$$

e A-lineare nella variabile X: $\mathbf{D}_{aX} = a\mathbf{D}_X$.

Nel caso $D = \Omega_A$ ritroviamo ovviamente il concetto usuale di derivata covariante. Se $\mathbf{D}$ è una D-derivata covariante in E allora possiamo associarle una D-connessione ∇ determinata dalla

$$i_X \nabla e = \mathbf{D}_X e$$

Che ∇ così definita sia una connessione è ovvio:

$$i_X \nabla(ae) = \mathbf{D}_X(ae) = a\mathbf{D}_X e + i_X(\delta a)e = a i_X \nabla e + X(a)e = a\nabla_X e + i_X \delta a \otimes e$$

Questa corrispondenza fra derivate covarianti e connessioni è biunivoca, dato che la contrazione fra D_δ e D è non degenere.

Possiamo interpretare $\mathbf{D}$ come un operatore nello spazio $\bigwedge_A(D_\delta, E)$, formato dalle mappe A-multilineari alternanti da D_δ in E, tale che, se $\varphi : D_\delta^k \longrightarrow E$:

$$\begin{aligned}(\mathbf{D}\varphi)(D_0, ..., D_k) = &\sum_{i=0}^{k}(-1)^i \mathbf{D}_{D_i}(\varphi(D_0, ..., \widehat{D_i}, ..., D_k)) + \\ &+ \sum_{i<j}^{0...k}(-1)^{i+j}\varphi([D_i, D_j], D_0, ..., \widehat{D_i}, ..., \widehat{D_j}, ..., D_k)\end{aligned}$$

(D_δ è un'algebra di Lie). Osserviamo tuttavia che in generale questa mappa $\mathbf{D}$ non definisce un differenziale nel complesso $\bigwedge_A(D_\delta, E)$: infatti lo è se e solo se la curvatura della connessione associata a $\mathbf{D}$ è nulla.

Teorema 2.3.12 *La curvatura R_∇ di una connessione ∇ definisce una mappa $\mathbb{K}$-bilineare*

$$R_{\mathbf{D}} : D_\delta \times D_\delta \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)$$

come

$$R_{\mathbf{D}}(X, Y) = i_X i_Y R_\nabla$$

che soddisfa alla

$$R_{\mathbf{D}}(X, Y) = \mathbf{D}_X \mathbf{D}_Y - \mathbf{D}_Y \mathbf{D}_X - \mathbf{D}_{[X,Y]}$$

DIMOSTRAZIONE: Ovviamente la $R_{\mathbf{D}}$ definita come nell'enunciato è una mappa $\mathbb{K}$-bilineare; l'identità dell'enunciato equivale all'equazione di struttura. Un modo alternativo di dimostrarla è usare la definizione:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{D}_X\mathbf{D}_Y e_i - \mathbf{D}_Y\mathbf{D}_X e_i - \mathbf{D}_{[X,Y]}e_i &= i_X\nabla i_Y\nabla e_i - i_Y\nabla i_X\nabla e_i - i_{[X,Y]}\nabla e_i \\
&= i_X\nabla\left(e_j\otimes i_Y\Gamma_{ji}\right) - i_Y\nabla\left(e_j\otimes i_X\Gamma_{ji}\right) - e_j\otimes i_{[X,Y]}\Gamma_{ji} \\
&= i_X\nabla e_j\otimes i_Y\Gamma_{ji} - i_Y\nabla e_j\otimes i_X\Gamma_{ji} + e_j\otimes i_X d\left(i_Y\Gamma_{ji}\right) - \\
&\quad - e_j\otimes i_Y d\left(i_X\Gamma_{ji}\right) - e_j\otimes i_{[X,Y]}\Gamma_{ji} \\
&= e_k\otimes\left(i_X\Gamma_{kj}i_Y\Gamma_{ji} - i_Y\Gamma_{kj}i_X\Gamma_{ji}\right) + \\
&\quad + e_j\otimes\big(i_Xi_Y\Gamma_{ji} - i_Yi_X\Gamma_{ji} - i_{[X,Y]}\Gamma_{ji}\big) \\
&= i_Xi_Ye_k\otimes\Gamma_{kj}\Gamma_{ji} + i_Xi_Ye_j\otimes d\Gamma_{ji} \\
&= i_Xi_Y\left(\nabla e_j\otimes\Gamma_{ji} + e_jd\Gamma_{ji}\right) \\
&= i_Xi_Y\nabla(e_j\otimes\Gamma_{ji}) = i_Xi_Y\nabla^2 e_i \\
&= R_{\mathbf{D}}(X,Y)e_i
\end{aligned}
$$

(ove abbiamo usato la convenzione di Einstein sugli indici j e k).

QED

Una derivata covariante la cui curvatura sia identicamente nulla (cioè corrispondente ad una connessione piatta) consente di identificare il complesso $(\bigwedge_A(D_\delta, E), \mathbf{D})$ col complesso di Chevalley–Eilenberg per l'algebra di Lie $\mathrm{Der}(A)$ a coefficienti nel modulo E.

Ad esempio consideriamo il modulo differenziale $D = \mathcal{H}_A$: allora $D_\delta = A\,\mathrm{Ham}\,A = \mathcal{H}_A$, dato che il nucleo del differenziale è $\ker X = \mathrm{Cas}\,A$, e se $c \in \mathrm{Cas}\,A$:

$$X(c) = 0 \iff X \in \mathrm{Ham}\,A$$

Dunque una $\mathcal{H}_A$-derivata covariante è un operatore

$$\mathbf{D} : \mathcal{H}_A \times E \longrightarrow E$$

tale che

$$\mathbf{D}_{X_a}(be) = b\mathbf{D}_{X_a}e + \{a,b\}e$$

Notiamo che in questo caso la contrazione è un operatore

$$i : \mathcal{H}_A \times \mathcal{H}_A \longrightarrow A$$

tale che

$$i_{aX_h}bX_k = abi_{X_h}X_k = ab\{h,k\}$$

2.4 Calcolo differenziale sulle algebre di Poisson

Torniamo ora a considerare un'algebra di Poisson qualsiasi $(A, \cdot, \{\,\})$, e l'operatore $X : A \longrightarrow \operatorname{Der} A$ che porta un elemento $a \in A$ nel campo hamiltoniano X_a corrispondente. Abbiamo già detto che $\operatorname{Ham}(A)$ (l'immagine di X) genera un A-sottomodulo di $\operatorname{Der} A$, che denotiamo $\mathcal{H}_A$: si tratta, rispetto alla funzione X, di un modulo differenziale, e quindi esiste un unico morfismo $\mu : \Omega_A \longrightarrow \mathcal{H}_A$ di A-moduli differenziali tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "X"] \arrow[d, "d"] & \mathcal{H}_A \\ \Omega_A \arrow[ur, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

In altri termini $X = \mu \circ d$.

Ad esempio, nel caso $A = C^\infty(M)$ (varietà di Poisson) abbiamo che $\mu = \pi^\#$ (π è il tensore di Poisson), dato che $\mu : \Omega_A \longrightarrow \operatorname{Der} A$ deve essere unica per universalità e certamente $\pi^\#$ fa commutare il diagramma precedente (Ω_A è lo spazio delle 1-forme e $\operatorname{Der} A$ è l'algebra di Lie $\mathfrak{X}(M)$ dei campi di vettori): ciò segue dall'essere $\pi^\#$ un morfismo di moduli e dal fatto che i differenziali esatti generano, come modulo, l'intero spazio delle 1–forme differenziali.

Per definizione, abbiamo inoltre

$$\{a, b\} = X_a b = (\mu(da))(b) = \langle \mu da, db \rangle$$

Cioè le parentesi di Poisson si possono descrivere in termini dell'operatore μ: questo pone in evidenza come il valore di $\{a, b\}$ non dipenda che dai differenziali di a e b; naturalmente ciò poteva già dirsi dalla $\{a, b\} = X_a b$, dato che X_a è una derivazione e quindi, per universalità, corrisponde ad un elemento del duale Ω_A^* del modulo dei differenziali di Kähler.

Vogliamo ora usare l'operatore μ per caratterizzare completamente la struttura di Poisson: questo approccio al formalismo hamiltoniano (se non alle strutture di Poisson) è dovuto a Gel'fand e Dorfman (cfr. [**?**]).

Per caratterizzare la struttura di algebra di Poisson in termini dell'operatore μ consideriamo lo spazio degli operatori A-lineari $\Omega_A \longrightarrow \operatorname{Der} A$, e su di esso la seguente operazione[4]:

$$[\mu,\nu]_S(\omega_1,\omega_2,\omega_3) = \underset{1,2,3}{\circlearrowright\!\!\!\!\!\!\sum} \left(\langle \mu\mathcal{L}_{\nu\omega_1}\omega_2,\omega_3\rangle + \langle \nu\mathcal{L}_{\mu\omega_1}\omega_2,\omega_3\rangle\right)$$

Questa operazione si dice *parentesi di Schouten* dei due operatori μ e ν, e definisce un operatore trilineare $\Omega_A \otimes \Omega_A \otimes \Omega_A \longrightarrow A$.

Teorema 2.4.1 *Un'algebra associativa* $(A,\cdot)$ *è un'algebra di Poisson rispetto a certe parentesi* $\{\,\}$ *se e solo se esiste un operatore* $\mu : \Omega_A \longrightarrow \operatorname{Der} A$ *tale che*

(1) $\{a,b\} = \langle \mu da, db\rangle$ *per ogni* $a,b \in A$*;*

(2) μ *è antisimmetrico:* $\langle \mu\varphi,\psi\rangle + \langle \varphi,\mu\psi\rangle = 0$*;*

(3) $[\mu,\mu]_S = 0$.

DIMOSTRAZIONE: Ovviamente, per tramite della (1), la (2) equivale all'antisimmetria delle parentesi di Poisson. Resta da verificare l'equivalenza della (3) all'identità di Jacobi: supponiamo ad esempio che valga l'identità di Jacobi per $\{\,\}$ e di voler dimostrare la (3) per l'operatore μ definito dalla (1); allora basta osservare che

$$\begin{aligned}[\mu,\mu]_S(da,db,dc) &= \underset{a,b,c}{\circlearrowright\!\!\!\!\!\!\sum} \left(\langle \mu\mathcal{L}_{X_a}db,dc\rangle + \langle \mu\mathcal{L}_{X_a}db,dc\rangle\right)\\ &= 2\underset{a,b,c}{\circlearrowright\!\!\!\!\!\!\sum}\langle \mu d\{a,b\},dc\rangle = 2\underset{a,b,c}{\circlearrowright\!\!\!\!\!\!\sum}\{\{a,b\},c\}\end{aligned}$$

Dato che Ω_A è generato dai differenziali esatti questo basta a concludere che se $\{\,\}$ soddisfa l'identità di Jacobi allora $[\mu,\mu]_S = 0$; il viceversa segue dallo stesso identico calcolo, letto a ritroso.

QED

Ora osserviamo che, usando la proprietà universale dei differenziali $\operatorname{Der} A = (\Omega_A)^*$ possiamo rendere più simmetrica questa caratterizzazione di una struttura di Poisson introducendo una mappa $\pi : \Omega_A \times \Omega_A \longrightarrow A$ legata all'operatore μ nel modo seguente:

$$\pi(da,db) = \langle \mu da, db\rangle$$

[4]Usiamo la seguente notazione: se un termine sintattico T dipende dai simboli $(a_1,...,a_n)$ presi in questo ordine allora la scrittura

$$\underset{a_1,\dots,a_n}{\circlearrowright\!\!\!\!\!\!\sum} T$$

denota la somma degli n termini ottenuti da T permutando ciclicamente i simboli $(a_1,...,a_n)$.

Di solito, in accordo con le notazioni della Geometria Differenziale, si scrive $\mu = \pi^{\#}$, considerando μ come il morfismo "musicale (*sharp map*) indotto dal tensore π.

L'operatore π si dice *tensore di Poisson*, dato che evidentemente si tratta, nel caso $A = C^\infty(M)$, esattamente del tensore di Poisson della varietà M: $\pi \in (\Omega_A \wedge \Omega_A)^* \cong \mathrm{Der}\, A \wedge \mathrm{Der}\, A$. Anche in questo caso esiste una condizione di integrabilità che generalizza quella di Lie sulle varietà e che si scrive utilizzando le parentesi di Schouten–Nijenhuis[5], che possiamo definire come segue: intanto consideriamo gli A-moduli delle multi-derivazioni antisimmetriche

$$D_A^k = \bigwedge\nolimits_A^k \mathrm{Der}\, A$$

(la cui somma diretta fornisce un modulo graduato) che chiameremo ovviamente *tensori controvarianti antisimmetrici* su A.

Teorema 2.4.2 *Esiste un'unica struttura di algebra di Lie graduata sullo spazio* $\bigwedge^* \mathrm{Der}\, A$ *dei tensori antisimmetrici controvarianti su un'algebra associativa A:*

$$[\,] : D_A^i \times D_A^j \longrightarrow D_A^{i+j-1}$$

tale che

$$(*) \qquad [P, Q \wedge R] = [P, Q] \wedge R + (-1)^{q(p+1)} Q \wedge [P, R]$$

e che estenda la parentesi di Lie delle derivazioni $\mathrm{Der}\, A$ *e la valutazione di una derivazione su un elemento dell'algebra A.*

DIMOSTRAZIONE: Vogliamo dimostrare che esistono uniche delle parentesi $[\,]$ tali che verifichino la (*) e le

$$(**) \qquad [P, Q] = (-1)^{pq}[Q, P]$$

$$(***) \quad (-1)^{p(r-1)}[P, [Q, R]] + (-1)^{r(q-1)}[R, [P, Q]] + (-1)^{q(p-1)}[Q, [R, P]] = 0$$

Le (**) e (***) sono gli assiomi per le algebre di Lie graduate.

L'enunciato richiede inoltre che la parentesi che vogliamo definire estenda l'usuale commutatore fra gli elementi di $D_A^1 = \mathrm{Der}\, A$ e la valutazione di una derivazione in D_A^1 su una funzione in $D_A^0 = A$; devono cioè essere soddisfatte le

$$[a, b] = 0 \qquad [a, X] = X(a) \qquad [X, Y] = XY - YX$$

[5] Esiste un intero formalismo che poggia su queste parentesi e su altre loro collegate, per il quale si rimanda a [10], [?] e [78].

da cui si ha pure

$$[aX, bY] = (aX)(bY) - (bY)(aX) = a(Xb)Y - b(Ya)X + ab[X, Y]$$

se $a, b \in D^0_A$ e $X, Y \in D^1_A$. Inoltre, per la (*) otteniamo ad esempio che, se $X, Y, Z \in \operatorname{Der} A$, allora deve aversi

$$[X, Y \wedge Z] = [X, Y] \wedge Z + Y \wedge [X, Z]$$

e quindi, per induzione, fra due tensori decomponibili $X_1 \wedge ... \wedge X_p$ e $Y_1 \wedge ... \wedge Y_q$ il prodotto deve verificare la:

$$[X_1 \wedge ... \wedge X_k, Y_1 \wedge ... \wedge Y_q] = (-1)^{p+1} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} (-1)^{i+j} [X_i, Y_j] \wedge X_1 \wedge ... \wedge \widehat{X_i} \wedge ... \\ ... \wedge X_p \wedge Y_1 \wedge ... \wedge \widehat{Y_j} \wedge ... \wedge Y_q$$

È un facile benché tedioso calcolo (cfr. e.g. [102], [10]) verificare che con questa definizione anche le (**) e (***) sono soddisfatte. Dato che l'A-modulo dei tensori è generato dai tensori decomponibili, ciò conclude la dimostrazione.

QED

Questo teorema risale sostanzialmente a Schouten e Nijenhuis (cfr. [?], [78]). Utilizzando la dualità fra derivazioni e forme possiamo esprimere la parentesi di Schouten nella forma datale da Nijenhuis:

Corollario 2.4.3 *Se $P \in D^p_A$, $Q \in D^q_A$ e $\omega \in \Omega^{p+q-1}_A$ allora*

$$i_{[P,Q]}\omega = (-1)^{q(p+1)} i_P d\left(i_Q \omega\right) + (-1)^p i_Q d\left(i_P \omega\right) - i_{P \wedge Q} d\omega$$

DIMOSTRAZIONE: Dimostriamo il corollario per doppia induzione sul grado dei tensori P e Q: supponiamo che $X \in \operatorname{Der} A$ e $Q = Y_1 \wedge ... \wedge Y_q \in D^q_A$, e ricordiamo che

$$\begin{aligned} i_{X\wedge Q} d\omega = i_X i_Q \omega &+ \sum_{i=1}^{q} (-1)^i i_{Y_i} i_{X \wedge Y_1 \wedge ... \wedge \widehat{Y_i} \wedge ... \wedge Y_q} \omega + \\ &+ \sum_{j=1}^{q} (-1)^j i_{[X, Y_j] \wedge Y_1 \wedge ... \wedge \widehat{Y_i} \wedge ... \wedge Y_q} \omega + \\ &+ \sum_{i<j}^{1...q} (-1)^{i+j} i_{[Y_i, Y_j] \wedge X \wedge Y_1 \wedge ... \wedge \widehat{Y_i} \wedge ... \widehat{Y_j} \wedge ... \wedge Y_q} \omega \end{aligned}$$

Nel terzo addendo a secondo membro riconosciamo $i_{[X,Y_1\wedge\ldots\wedge Y_q]}\omega$, sicché

$$\begin{aligned} i_{[X,Q]}\omega &= i_X i_Q\omega - i_X i_Q d\omega + \sum_{i=1}^{q}(-1)^{i+q} i_{Y_i} i_{Y_1\wedge\ldots\wedge\widehat{Y_i}\wedge\ldots\wedge Y_q\wedge X}\omega + \\ &+ \sum_{i<j}^{1\ldots q}(-1)^{i+j+q-2} i_{[Y_i,Y_j]\wedge Y_1\wedge\ldots\wedge\widehat{Y_i}\wedge\ldots\widehat{Y_j}\wedge\ldots\wedge Y_q\wedge X}\omega \\ &= i_X d i_Q\omega - i_X i_Q d\omega - i_Q d i_X\omega \end{aligned}$$

Questo dimostra la formula nel caso $p = 1$; ora supponiamola vera per $p > 1$ e dimostriamola per $p + 1$. Si tratta di osservare che (per le (*) e (**) del teorema precedente)

$$\begin{aligned} i_{[P\wedge X,Q]}\omega &= (-1)^{(p+1)q} i_{[Q,P\wedge X]}\omega \\ &= (-1)^{(p+1)q} i_{[Q,P]\wedge X}\omega + (-1)^{(p+1)q}(-1)^{p(q+1)} i_{P\wedge[Q,X]}\omega \\ &= (-1)^{(p+1)q} i_{[Q,P]} i_X\omega + (-1)^{q+p} i_P i_{[Q,X]}\omega \end{aligned}$$

Ora ai due addendi in quest'ultimo termine si possono applicare rispettivamente l'ipotesi induttiva e il caso $p = 1$ precedentemente trattato: combinandoli si ottiene la tesi.

QED

Non ci siamo spinti nei dettagli di questo risultato ben noto (cfr. [102] e [10]): una dimostrazione alternativa, che utilizza le connessioni e gli operatori differenziali, si può trovare in [57].

Ora possiamo riformulare il teorema di caratterizzazione in termini del tensore di Poisson:

Teorema 2.4.4 *Un'algebra associativa $(A,\cdot)$ è un'algebra di Poisson rispetto a certe parentesi $\{\,\}$ se e solo se esiste un tensore $\pi : \Omega_A \otimes \Omega_A \longrightarrow A$ tale che*

(1) $\{a, b\} = \pi(da, db)$ *per ogni* $a, b \in A$;

(2) π *è antisimmetrico:* $\pi(da, db) + \pi(db, da) = 0$;

(3) $[\pi, \pi] = 0$.

Dimostrazione: La dimostrazione è essenzialmente la stessa del teorema 2.4.1: dimostriamo quindi che la (3) equivale all'identità di Jacobi per le parentesi di Poisson, per tramite della (1): intanto notiamo che, dato che $\pi \in \bigwedge^2 \operatorname{Der} A$, il corollario precedente applicato a π diviene

$$i_{[\pi,\pi]}\omega = -i_\pi d i_\pi\omega + i_\pi d i_\pi\omega - i_{\pi\wedge\pi} d\omega$$

e quindi abbiamo che

$$\begin{aligned} i_{[\pi,\pi]} da \wedge db \wedge dc &= -\sum_{a,b,c} \pi(da, d\pi(db, dc)) \\ &= -\sum_{a,b,c} \pi(da, d\{b,c\}) = -\sum_{a,b,c} \{a, \{b,c\}\} \end{aligned}$$

QED

Non è difficile ricavare la condizione di integrabilità locale di Lie che abbiamo dato sulle varietà di Poisson dalla $[\pi, \pi] = 0$.

Il calcolo differenziale che abbiamo delineato sui moduli per le algebre associative ammette, nel caso delle algebre di Poisson, una perfetta dualità fra differenziali e derivazioni che manca nel caso associativo, dualità che ora vogliamo discutere. In particolare possiamo utilizzare la struttura di Poisson e le sue caratterizzazioni in termini dell'operatore $\mu = \pi^\#$ e del tensore di Poisson π per definire un differenziale sulle derivazioni e una parentesi di Lie sulle 1-forme.

Per prima cosa definiamo delle parentesi di Lie su Ω_A legate alla presenza di una struttura di Poisson su A per mezzo del seguente

Teorema 2.4.5 *Esiste un'unica struttura di $\mathbb{K}$-algebra di Lie $\{\,\}$: $\Omega_A \times \Omega_A \longrightarrow \Omega_A$ sullo spazio dei differenziali Ω_A tale che valgano le seguenti condizioni:*

(1) *Se $a, b \in A$ allora $d\{a,b\} = \{da, db\}$*

(2) *Se $a \in A$, $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_A$ allora $\{\omega_1, a\omega_2\} = a\{\omega_1, \omega_2\} + \langle \pi^\# \omega_1, da\rangle \omega_2$*

ove $\pi^\# : \Omega_A \longrightarrow \operatorname{Der} A$ è l'operatore che caratterizza la struttura di Poisson.
DIMOSTRAZIONE: Intanto notiamo che se una tale struttura di algebra di Lie esiste allora è univocamente determinata dal valore che assume sui differenziali esatti, in virtù della (2). Consideriamo ora la seguente definizione:

$$\begin{aligned} \{\omega_1, \omega_2\} &= \mathcal{L}_{\pi^\#\omega_1} \omega_2 - \mathcal{L}_{\pi^\#\omega_2} \omega_1 - d\pi(\omega_1, \omega_2) \\ &= \mathcal{L}_{\pi^\#\omega_1} \omega_2 - \mathcal{L}_{\pi^\#\omega_2} \omega_1 - d i_{\pi^\#\omega_1} \omega_2 \end{aligned}$$

e verifichiamo che si tratta di una struttura di algebra di Lie che soddisfa alle (1) e (2) dell'enunciato (come abbiamo osservato basta verificarlo sui differenziali esatti). La (1) segue da

$$\begin{aligned} \{da, db\} &= \mathcal{L}_{\pi^\# da} db - \mathcal{L}_{\pi^\# da} db - d\pi(da, db) \\ &= d\mathcal{L}_{X_a} b - d\mathcal{L}_{X_b} a - d\{a,b\} \\ &= d\{a,b\} - d\{b,a\} - d\{a,b\} = d\{a,b\} \end{aligned}$$

Per la (2) basta notare che

$$\begin{aligned}\{\omega_1, a\omega_2\} &= \mathcal{L}_{\pi^\#\omega_1} a\omega_2 - \mathcal{L}_{\pi^\# a\omega_2}\omega_1 - d\pi(a\omega_1, \omega_2)\\ &= \langle \pi^\#\omega_1, da\rangle\omega_2 + a\mathcal{L}_{\pi^\#\omega_1}\omega_2 - a\mathcal{L}_{\pi^\#\omega_2}\omega_1 -\\ &- da \wedge i_{\pi^\#\omega_2}\omega_1 - da \wedge \pi(\omega_1, \omega_2) - ad\pi(\omega_1, \omega_2)\\ &= \langle \pi^\#\omega_1, da\rangle\omega_2 + a\{\omega_1, \omega_2\}\end{aligned}$$

Che si tratti di una operazione $\mathbb{R}$-bilineare antisimmetrica è ovvio; l'identità di Jacobi si dimostra, dato che basta verificarla su combinazioni A-lineari di differenziali esatti, combinando le (1), (2) e l'identità di Jacobi per le parentesi di Poisson.

QED

Anche questo teorema è ben noto (cfr. [102], [9], [10]). Osserviamo che il differenziale d diviene un morfismo di algebre di Lie: anche l'operatore $\pi^\#$ lo è, come segue dal

Corollario 2.4.6 $\pi^\#\{\omega_1, \omega_2\} = [\pi^\#\omega_1, \pi^\#\omega_2]$

DIMOSTRAZIONE: Dato che l'A-modulo Ω_A è generato dai differenziali esatti ci basta mostrare l'identità per $\omega_1 = adb$ e $\omega_2 = cde$: per questo usiamo le proprietà delle parentesi $\{\ \}$ fra 1-forme espresse dal teorema precedente e la A-linearità di $\pi^\#$:

$$\begin{aligned}\pi^\#\{adb, cde\} &= \pi^\# c\{adb, de\} + \pi^\#\langle \pi^\#(adb), dc\rangle de\\ &= c\pi^\# a\{db, de\} - c\pi^\#\langle \pi^\# de, da\rangle db + \langle \pi^\#(adb), dc\rangle X_e\\ &= acX_{\{b,e\}} - c\{e, a\}X_b + a\{b, c\}X_e\\ &= ac[X_b, X_e] + a(X_b c)X_e - c(X_e a)X_b\\ &= aX_b(cX_e) - cX_e(aX_b) = [aX_b, cX_e]\\ &= [\pi^\#(adb), \pi^\#(cde)]\end{aligned}$$

QED

Abbiamo osservato nel § precedente come la coppia $(\mathcal{H}_A, X)$ sia un modulo differenziale; possiamo quindi estendere questo differenziale $X : A \longrightarrow \mathrm{Der}\, A$ in grado qualsiasi, definendo perciò un *differenziale hamiltoniano* $d_\pi : D^k_A \longrightarrow D^{k+1}A$ come, se $P \in D^p_A$ e $\omega_i \in \Omega_A$:

$$\begin{aligned}\langle d_\pi P, \omega_0 \wedge \dots \wedge \omega_p\rangle = &\sum_{i=0}^{p}(-1)^i \pi(\omega_i, di_P\omega_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\omega_i} \wedge \dots \wedge \omega_p) +\\ &+ \sum_{i<j}^{0\dots p}(-1)^{i+j} i_P\{\omega_i, \omega_j\} \wedge \dots \wedge \widehat{\omega_i} \wedge \dots\widehat{\omega_j} \wedge \dots \wedge \omega_p\end{aligned}$$

Le verifiche delle

(1) $d_\pi \circ d_\pi = 0$
(2) $d_\pi(P \wedge Q) = d_\pi P \wedge Q + (-1)^p P \wedge d_\pi Q$
(3) d_π è $\mathbb{K}$-lineare.

sono del tutto analoghe al caso del differenziale esterno fra forme differenziali su una varietà. Osserviamo che l'algebra esterna sul modulo Der A

$$D_A := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \bigwedge\nolimits_A^n \mathrm{Der}\, A$$

è un'algebra associativa differenziale graduata.

Potremmo anche definire un operatore di contrazione di una forma su un multi-vettore e una derivata di Lie lungo una forma differenziale, in analogia a quanto fatto nel caso covariante. Abbiamo cioè sui tensori controvarianti un calcolo differenziale hamiltoniano duale del calcolo differenziale di de Rham sulle forme differenziali; in particolare rispetto al differenziale d_π otteniamo un complesso di cocatene (D_A^k, d_π) la cui coomologia $H_\pi(A)$ si dice *coomologia di Poisson* di A (qui è stata definita in modo concreto, a partire cioè da un complesso che la calcola, sebbene sia possibile una definizione più astratta in termini di funtori derivati, cfr. [44]). Torneremo in séguito su questa coomologia, nel caso delle varietà, mentre per ora ci limitiamo a notare che il modulo di coomologia di Poisson sia dotato di un prodotto *cap* in virtù della proprietà (2) del differenziale hamiltoniano:

$$[P] \cap [Q] = [P \wedge Q]$$

Possiamo estendere il morfismo di moduli $\pi^\# : \Omega_A \longrightarrow D_A$ in grado qualsiasi, tenendo conto del segno, come

$$\langle \pi^\# \omega, \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k \rangle = (-1)^k \omega(\pi^\# \omega_1 \wedge \ldots \wedge \pi^\# \omega_k)$$

(così che $\{f, g\} = \langle \pi^\# df, dg \rangle = -df(\pi^\# dg) = -\{g, f\}$). Usando questa definizione possiamo dimostrare il

Lemma 2.4.7 $d_\pi \circ \pi^\# + \pi^\# \circ d = 0$

DIMOSTRAZIONE: Se $\omega \in \Omega_A^n$ e $\varphi_1, .., \varphi_k \in \Omega_A$:

$$\langle \pi^\# d\omega, \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k \rangle = (-1)^k \langle d\omega, \pi^\# \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \pi^\# \varphi_k \rangle$$
$$= (-1)^k \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} (\pi^\# \varphi_i) \omega(\pi^\# \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\pi^\# \varphi_i} \wedge \ldots \wedge \pi^\# \varphi_k) +$$

$$+(-1)^k \sum_{i<j}^{1...k} (-1)^{i+j} \omega([\pi^\# \varphi_i, \pi^\# \varphi_j], \pi^\# \varphi_1 \wedge ... \wedge \widehat{\pi^\# \varphi_i} \wedge ... \wedge \widehat{\pi^\# \varphi_j} \wedge ... \wedge \pi^\# \varphi_k)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+k+1} (\pi^\# \varphi_i) \omega(\pi^\# \varphi_1 \wedge ... \wedge \widehat{\pi^\# \varphi_i} \wedge ... \wedge \pi^\# \varphi_k) +$$

$$+ \sum_{i<j}^{1...k} (-1)^{i+j+k} \omega(\pi^\# \{\varphi_i, \varphi_j\}, \pi^\# \varphi_1 \wedge ... \wedge \widehat{\pi^\# \varphi_i} \wedge ... \wedge \widehat{\pi^\# \varphi_j} \wedge ... \wedge \pi^\# \varphi_k)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+k+1} (-1)^{k-1} (\pi^\# \varphi_i) \langle \pi^\# \omega, \varphi_1 \wedge ... \wedge \widehat{\varphi}_i \wedge ... \wedge \varphi_k \rangle +$$

$$+ \sum_{i<j}^{1...k} (-1)^{i+j+k} (-1)^{k-2} \langle \pi^\# \omega, \{\varphi_i, \varphi_j\}, \varphi_1 \wedge ... \wedge \widehat{\varphi}_i \wedge ... \wedge \widehat{\varphi_j} \wedge ... \wedge \varphi_k \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \pi(\varphi_i, d i_{\pi^\# \omega} \varphi_1 \wedge ... \wedge \widehat{\varphi}_i \wedge ... \wedge \varphi_k) +$$

$$+ \sum_{i<j}^{1...k} (-1)^{i+j} \langle \pi^\# \omega, \{\varphi_i, \varphi_j\}, \varphi_1 \wedge ... \wedge \widehat{\varphi}_i \wedge ... \wedge \widehat{\varphi_j} \wedge ... \wedge \varphi_k \rangle$$

$$= -\langle d_\pi \pi^\# \omega, \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_k \rangle$$

QED

Teorema 2.4.8 *Se $P \in D_A^p$ allora $d_\pi P = -[\pi, P]$*

Dimostrazione: Si procede per induzione sul grado del tensore P: se $P \in D_A^0 = A$ e $\omega \in \Omega_A$ allora

$$\begin{aligned} \langle [\pi, P], \omega \rangle &= \langle \pi, d(P\omega) \rangle - P\langle \pi, d\omega \rangle = \pi(dP, \omega) + P\langle \pi, d\omega \rangle - P\langle \pi, d\omega \rangle \\ &= -\pi(\omega, dP) = -\langle d_\pi P, \omega \rangle \end{aligned}$$

Se $P \in D_A^1 = \mathrm{Der}\, A$ e $a, b \in A$ allora:

$$\begin{aligned} \langle [\pi, P], da \wedge db \rangle &= -i_\pi d i_P (da \wedge db) + i_P d\{a, b\} \\ &= -\langle \pi, d(P(a)db - P(b)da) \rangle + \langle P, d\{a, b\} \rangle \\ &= -\pi(dP(a), db) + \pi(dP(b), da\rangle + \langle P, d\{a, b\} \rangle \\ &= -\pi(da, d i_P db) + \pi(db, d i_P da) + \langle P, d\{a, b\} \rangle \\ &= -\langle d_\pi P, da \wedge db \rangle \end{aligned}$$

Nel caso generale, supponendo $P = Q \wedge X$ con $Q \in D_A^q$ e $X \in D_A^1$, abbiamo $[\pi, P] = [\pi, Q] \wedge X + (-1)^q Q \wedge [\pi, X] = -d_\pi Q \wedge X - (-1)^q Q \wedge d_\pi X = -d_\pi P$ per il caso $q = 1$ e l'ipotesi induttiva.

QED

Questo teorema consente in particolare di interpretare la condizione $[\pi, \pi] = 0$ come una condizione di cociclo: il tensore di Poisson definisce quindi una classe nel secondo modulo di coomologia di Poisson dell'algebra.

Inoltre, per il lemma, il morfismo di moduli $\pi^\#$ induce un morfismo di complessi di cocatene, e quindi una mappa

$$H_{dR}(A) \longrightarrow H_\pi(A)$$

dall'algebra di coomologia di de Rham all'algebra di coomologia di Poisson di A.

Identifichiamo i primi tre gruppi di coomologia di un'algebra di Poisson:

Teorema 2.4.9 *Se A è un'algebra di Poisson allora*

(*a*) $H^0_\pi(A) = \operatorname{Cas} A$.

(*b*) $H^1_\pi(A) = \operatorname{Can} A / \operatorname{Ham} A$.

DIMOSTRAZIONE: Per la (a) si tratta di osservare che $D^0_A = A$ e che l'essere $a \in D^0_A$ un cociclo significa significa che $d_\pi a = 0$ cioè che $X_a = 0$ e quindi, per ogni $b \in A$: $\{a, b\} = 0$. Dunque $H^0_\pi(A) = Z^0_\pi(A) = \operatorname{Cas} A$. Per la (b) basta notare che un 1-cociclo è un elemento D di $D^1_A = \operatorname{Der} A$ tale che $d_\pi D = 0$, cioè, per ogni $a \in a$:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle d_\pi D, da \wedge db\rangle = \pi(da, dD(b)) - \pi(db, dD(a)) - \langle D, \{da, db\}\rangle \\ &= \{D(a), b\} + \{a, D(b)\} - D\{a, b\} \end{aligned}$$

Quindi gli 1-cocicli sono i campi canonici. Gli 1-cobordi sono invece gli elementi di $\operatorname{Der} A$ della forma $d_\pi a = X_a$ per qualche $a \in A$, cioè i campi hamiltoniani, e quindi $H^1_\pi(A) = \operatorname{Can} A / \operatorname{Ham} A$.

QED

Possiamo dare una interpretazione anche per $H^2_\pi(A)$ che, almeno in questa formulazione algebrica, non sembra essere presente in letteratura[6].

Definizione 2.4.10 *Una* deformazione *di un'algebra di Poisson A è una sequenza esatta di $\mathbb{K}$-spazi vettoriali*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} \Omega_A \longrightarrow 0$$

[6]Nel caso $A = C^\infty(M)$ esistono dei calcoli particolari, dovuti a Lu, Ginzburg e Nakhanishi che presentano $H^2_\pi(A)$ in modo concreto come spazio di deformazioni del tensore di Poisson.

ove E è una $\mathbb{K}$-algebra di Poisson, p un morfismo di $\mathbb{K}$-algebre di Lie e i un morfismo di $\mathbb{K}$-algebre associative, tali che

$$i\{p(e), b\} = [e, i(b)]$$

Due deformazioni si dicono equivalenti *se esiste un morfismo di $\mathbb{K}$-algebre di Lie $h : E \longrightarrow E'$ in modo che il diagramma*

$$\begin{tikzcd}
 & & E \arrow[dd] \arrow[dr] & & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[ur] \arrow[dr] & & \Omega_A \arrow[r] & 0 \\
 & & E' \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

sia commutativo

Il motivo della terminologia si può spiegare come segue: consideriamo il tensore di Poisson $\pi : \Omega_A \wedge \Omega_A \longrightarrow A$ e supponiamo che

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} \Omega_A \longrightarrow 0$$

sia una deformazione di A: allora possiamo comporre π con p e ottenere il tensore

$$\tilde{\pi}(e_1, e_2) = \pi(p(e_1), p(e_2))$$

su E: questa struttura di Lie è la deformazione del tensore di Poisson associata a E. Ad esempio, il tensore di Poisson stesso definisce una tale deformazione (banale) su Ω_A con $i = 0$ e p l'identità; la deformazione corrispondente a $p = 0$ e i l'identità (con $E = A$) è quella nulla, che deforma cioè la struttura di Poisson in una identicamente nulla.

Teorema 2.4.11 *$H^2_\pi(A)$ è il modulo delle deformazioni delle strutture di Poisson su A modulo equivalenza.*

La dimostrazione è classica, e ripete ad esempio quella data in [19, §XIV-5] per le estensioni di algebre di Lie (cfr. pure [41, §1.4]).

Negli esempi principali di algebre di Poisson che abbiamo introdotto (le algebre delle varietà simplettiche e dei duali delle algebre di Lie) la coomologia di Poisson coincide con oggetti ben noti:

Teorema (Lichnerowicz) **2.4.12** *La coomologia di Poisson dell'algebra $A = C^\infty(S)$ ove S è una varietà simplettica coincide con la coomologia di de Rham della varietà.*

Questo segue immediatamente dall'essere l'isomorfismo $\pi^\#$ un isomorfismo dei rispettivi complessi di coomologia (cfr. [64] per una dimostrazione diretta).

Teorema (GINZBURG–LU–WEINSTEIN) **2.4.13** *La coomologia di Poisson dell'algebra $A = C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ della varietà di Poisson lineare duale di un'algebra di Lie coincide con la coomologia dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ a coefficienti nella rappresentazione A.*

Si tratta di un risultato noto che non ridimostreremo qui (cfr. [43]).

A titolo di esempio della difficoltà del calcolo della coomologia di Poisson in generale, anche per la mancanza di reali strumenti computazionali (ad esempio questa coomologia, malgrado il nome, non è funtoriale!), diamo la coomologia di alcune strutture di Poisson quadratiche nel piano, determinate da V. Ginzburg [42] e N. Nakanishi [**?**]: ad esempio la struttura di Poisson $\mathbb{R}^2_0$

$$\{f,g\}(x,y) = (x^2+y^2)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\right)$$

ha i seguenti gruppi di coomologia di Poisson:

$$H^0_\pi(\mathbb{R}^2_0) = \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad H^1_\pi(\mathbb{R}^2_0) = \mathbb{R}^2 \qquad \text{e} \qquad H^2_\pi(\mathbb{R}^2_0) = \mathbb{R}^2$$

ove i generatori in grado uno sono

$$x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} \qquad \text{e} \qquad x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$$

e i generatori in grado due sono

$$\frac{\partial}{\partial x}\wedge\frac{\partial}{\partial y} \qquad \text{e} \qquad (x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial x}\wedge\frac{\partial}{\partial y}$$

Invece, per la struttura di Poisson $\mathbb{R}^2_y$

$$\{f,g\} = y^2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\right)$$

il primo gruppo di coomologia è di dimensione infinita, come pure il secondo, che è isomorfo a $C^\infty(\mathbb{R})$ (cfr. [**?**]).

In ambedue i casi la dimostrazione è non banale (ancora mentre Vaisman scriveva il suo libro [102] non era chiaro quali fossero questi gruppi di coomologia).

Concludiamo introducendo un'altra nozione omologica sulle varietà di Poisson, vale a dire l'*omologia di Poisson* (cfr. [57], [13], [44], [102, §5]). Per introdurla consideriamo l'operatore $\Delta : \Omega_A^n \longrightarrow \Omega_A^{n-1}$ definito come

$$\Delta\omega = [i_\pi, d] = i_\pi d\omega - di_\pi\omega$$

Si tratta di un operatore differenziale di ordine minore di due. Inoltre

$$\Delta d + d\Delta = i_\pi d^2 - di_\pi d + di_\pi d - d^2 i_\pi = 0$$

Possiamo dare anche per questo operatore una espressione differenziale:

Proposizione 2.4.14

$$\begin{aligned}\Delta(a_0 da_1 \wedge ... \wedge a_n) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}\{a_0, a_i\} da_1 \wedge ... \wedge \widehat{da_i} \wedge ... \wedge da_n \\ &+ \sum_{i<j}^{1...n} (-1)^{i+j} a_0 d\{a_i, a_j\} \wedge da_1 \wedge ... \wedge \widehat{da_i} \wedge ... \wedge \widehat{da_j} \wedge ... \wedge da_n\end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE: Applichiamo la definizione e le proprietà del simbolo di sommatoria:

$$\begin{aligned}\Delta(a_0 da_1 \wedge ... \wedge a_n) &= i_\pi(da_0 \wedge da_1 \wedge ... \wedge da_n) - di_\pi(a_0 da_1 \wedge ... \wedge a_n) \\ &= \sum_{i<j}^{0...n} (-1)^{i+j+1} \pi(da_i \wedge da_j) da_0 \wedge ... \wedge \widehat{da_i} \wedge ... \wedge \widehat{da_j} \wedge ... \wedge da_n \\ &- d\sum_{i<j}^{1...n} (-1)^{i+j+1} a_0 \pi(da_i \wedge da_j) da_1 \wedge ... \wedge \widehat{da_i} \wedge ... \wedge \widehat{da_j} \wedge ... \wedge da_n \\ &= \sum_{i<j}^{0...n} (-1)^{i+j+1} \pi(da_i \wedge da_j) da_0 \wedge ... \wedge \widehat{da_i} \wedge ... \wedge \widehat{da_j} \wedge ... \wedge da_n \\ &- \sum_{i<j}^{1...n} (-1)^{i+j+1} \pi(da_i \wedge da_j) da_0 \wedge da_1 \wedge ... \wedge \widehat{da_i} \wedge ... \wedge \widehat{da_j} \wedge ... \wedge da_n \\ &- \sum_{i<j}^{1...n} (-1)^{i+j+1} a_0 d\pi(da_i \wedge da_j) \wedge da_1 \wedge ... \wedge \widehat{da_i} \wedge ... \wedge \widehat{da_j} \wedge ... \wedge da_n \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \pi(da_0 \wedge da_j) da_0 \wedge ... \wedge \widehat{da_i} \wedge ... \wedge \widehat{da_j} \wedge ... \wedge da_n \\ &- \sum_{i<j}^{1...n} (-1)^{i+j+1} a_0 d\pi(da_i \wedge da_j) \wedge da_1 \wedge ... \wedge \widehat{da_i} \wedge ... \wedge \widehat{da_j} \wedge ... \wedge da_n\end{aligned}$$

Tenendo conto del fatto che $\pi(da \wedge db) = \{a, b\}$ si ha la tesi.

QED

Corollario 2.4.15 $\Delta(adb) = \{a, b\}$.

Ora è facile verificare che $\Delta^2 = 0$: si tratta di un calcolo formale del tutto simile a quello per il differenziale esterno (cfr. [102, §4.2]). Abbiamo quindi una mappa di bordo che chiamiamo *differenziale di Koszul*, che dà luogo ad un complesso di catene

$$\cdots \longrightarrow \Omega_A^{n+1} \longrightarrow \Omega_A^n \longrightarrow \Omega_A^{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Omega_A^1 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

la cui omologia è l'*omologia di Poisson* dell'algebra A, e i cui gruppi si denotano con $H_n^\pi(A)$.

In generale questa omologia non è la duale della coomologia di Poisson, anche se esiste un legame: il calcolo è proibitivo quanto per la coomologia; comunque, come ci si aspetta (cfr. [13]):

Teorema (BRYLINSKI) **2.4.16** *Se S è una varietà simplettica allora l'omologia di Poisson dell'algebra $A = C^\infty(S)$ è isomorfa all'omologia di de Rham.*

Anche nel caso della varietà di Lie–Poisson vale un risultato analogo a quello della coomologia (cfr. [57]):

Teorema (KOSZUL) **2.4.17** *Se $\mathfrak{g}^*$ è una varietà di Lie–Poisson allora la sua omologia di Poisson è l'omologia dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ a coefficienti nella rappresentazione $A = C^\infty(\mathfrak{g}^*)$.*

Come esempio diamo qualche calcolo relativo al caso del piano simplettico con una singolarità nell'origine $\mathbb{R}_0^2$: cominciamo con il secondo gruppo di omologia, e consideriamo una 2-forma

$$\omega = f(x, y)dx \wedge dy$$

per la quale si ha

$$\Delta\omega = i_\pi d\omega - di_\pi\omega = -d(f(x, y)(x^2 + y^2))$$

Dunque l'essere un ciclo equivale a

$$f(x, y) = \frac{c}{x^2 + y^2}$$

con $c \in \mathbb{R}$ (per $x, y) \neq (0,0)$; ovviamente una tale funzione si estende in modo continuo su tutto $\mathbb{R}^2$ solo se $c = 0$, quindi lo spazio dei 2-cicli di Poisson è nullo, col che $H_2^\pi(\mathbb{R}_0^2) = 0$: in particolare non coincide né con $H_0(\mathbb{R}^2)$ (omologia di de Rham).

In grado zero abbiamo

$$H_0^\pi(\mathbb{R}_0^2) = \frac{C^\infty(\mathbb{R}^2)}{\operatorname{im}\Delta} = \frac{C^\infty(\mathbb{R}^2)}{\{(x^2+y^2)\operatorname{div} f \mid f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)\}}$$

Infatti

$$\Delta(adx + bdy) = \{a, x\} + \{b, y\} = (x^2+y^2)\,(\partial_x b - \partial_y a)$$

Si noti che questo spazio di omologia non è nullo: infatti la funzione

$$f(x, y) = (x - y)\sqrt{x^2+y^2}$$

non può in alcun modo appartenere allo spazio che figura a denominatore: dovremmo infatti, in quel caso, avere

$$(\partial_x b - \partial_y a) = \frac{x - y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

il che, in tutto il piano (compresa l'origine), è impossibile.

Lo spazio H_1^π è, per definizione, il quoziente

$$H_1^\pi(\mathbb{R}_0^2) = \frac{\{\omega \in \Omega \mid d\omega = 0\}}{\{\Delta(fdx \wedge dy)\}}$$

Infatti abbiamo già calcolato $\Delta(adx+bdy)$, e il suo annullarsi equivale all'annullarsi di $\partial_y a - \partial_y b$, cioè di $d\omega = d(adx+bdy)$; il denominatore coincide con $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, dato che

$$\Delta(fdx \wedge dy) = -d(f\{x, y\}) = -d(f(x^2+y^2))$$

e la mappa $\alpha : C^\infty(\mathbb{R}^2) \longrightarrow B_1^\pi(\mathbb{R}_0^2)$ definita come

$$\alpha(f) = -d(f(x^2+y^2))$$

è iniettiva, avendosi

$$-d(f(x^2+y^2)) = 0 \implies f = 0$$

(come abbiamo già notato nel calcolo di $H_0^\pi(\mathbb{R}^2)$) ed è suriettiva in modo ovvio.

2.5 Fibrazione sullo spettro di un'algebra di Poisson

Diamo qui un piccolo contributo alla questione generale, che si inquadra nel contesto della geometria non commutativa ([26]), della formulazione algebrica di nozioni geometriche sulle varietà di Poisson, in vista di analoghi non commutativi (e quindi dei cosiddetti procedimenti di quantizzazione).

Consideriamo un'algebra di Poisson A: ad essa possiamo associare un insieme "geometrico, vale a dire la famiglia degli ideali massimali dell'algebra associativa A, che denoteremo con $\mathrm{Spec}(A)$ (questa terminologia collide con quella usuale in Geometria Algebrica, ma è espressiva: volendo potremmo prendere il termine "spec come abbreviazione di "speculum piuttosto che di "spectrum, il che sembra più adeguato visto che le proprietà dell'algebra A si riflettono nel suo $\mathrm{Spec}(A)$).

Dato che A è un'algebra commutativa potremmo ripetere le usuali considerazioni che si svolgono in Geometria Algebrica per gli schemi, e in Analisi Funzionale per le C*-algebre commutative, tuttavia limitiamoci all'essenziale: consideriamo cioè $X = \mathrm{Spec}(A)$ e mostriamo come possieda una struttura naturale di spazio topologico indotta dalla struttura associativa di A.

Basti considerare gli elementi $a \in A$ come funzioni sui "punti $\chi \in \mathrm{Spec}(A)$, nell'ovvio modo seguente:

$$a(\chi) = \chi(a)$$

ove identifichiamo ideali massimali e funzionali moltiplicativi sull'algebra. Allora possiamo considerare la topologia su A più debole rispetto alla quale le funzioni $a \in A$ sono continue (topologia spettrale).

Esempio. Se $A = C^\infty(M)$ ove M è una varietà differenziabile allora è facile vedere che, come insieme, $\mathrm{Spec}(A) = M$. Inoltre la topologia spettrale coincide con la topologia della varietà, dato che un insieme è chiuso se e solo se è l'insieme degli zeri di una funzione differenziabile (teorema di Whithney).

Esempio. Se $A = C(X)$ (funzioni continue complesse su uno spazio topologico compatto di Hausdorff) allora $\mathrm{Spec}(A)$ è omeomorfo a X, come segue dalla teoria di Gel'fand-Naijmark.

L'altra classe ben nota di esempi è quella degli anelli commutativi noetheriani, per i quali gli spettri sono gli schemi algebrici (o meglio i loro modelli locali).

Ora consideriamo l'algebra associativa $\mathrm{Cas}\, A$ degli elementi di Casimir di un'algebra di Poisson A: possiamo considerarne lo spettro $\mathrm{Spec}\,\mathrm{Cas}\, A$, con la sua topologia spettrale.

Evidentemente esiste una suriezione

$$\Pi : \mathrm{Spec}\, A \longrightarrow \mathrm{Spec}\,\mathrm{Cas}\, A \longrightarrow 0$$

che corrisponde all'inclusione $\operatorname{Cas} A \subset A$: cioè, in qualche senso, lo spazio topologico $\operatorname{Spec} A$ definisce una fibrazione sullo spazio $\operatorname{Spec} \operatorname{Cas} A$.

Notiamo che lo spazio $\operatorname{Spec} \operatorname{Cas} A$ può avere una struttura topologica bizzarra; i due casi limite sono quelli di un'algebra di Poisson simplettica, vale a dire $\operatorname{Cas} A = \mathbb{K}$, nel qual caso $\operatorname{Spec} \operatorname{Cas} A$ è ridotto ad un sol punto, e, all'estremo opposto, di un'algebra di Poisson nulla, vale a dire $\operatorname{Cas} A = A$, nel qual caso la fibrazione precedente è l'identità.

Teorema 2.5.1 *Le fibre della mappa* Π *sono spettri di algebre di Poisson non degeneri.*

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spec} \operatorname{Cas} A$ e $\Pi^{-1}(\mathfrak{m})$: si tratta dell'insieme degli ideali massimali di A che contengono l'ideale massimale $\mathfrak{m}$ ovvero, se si vuole, dei caratteri dell'algebra A che, ristretti a $\operatorname{Cas} A$, sono lo stesso carattere. Ora consideriamo, per ciascun $\mathfrak{M} \in \Pi^{-1}(\mathfrak{m})$ il quoziente $A_{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}/\mathfrak{m}$: è un'algebra associativa, sulla quale esiste una struttura di Poisson definita come segue:

$$\{a + \mathfrak{m}, b + \mathfrak{m}\} = \{a, b\} + \mathfrak{m}$$

(ove $a, b \in \mathfrak{M}$). Questa definizione è ben posta dato che $\mathfrak{m} \subset \operatorname{Cas} A$, e inoltre definisce delle parentesi di Poisson dato che lo sono $\{\,\}$ su A; ora calcoliamo gli elementi di Casimir per queste parentesi: se $c+\mathfrak{m}$ è un tale elemento allora, per ogni $a \in \mathfrak{M}$:

$$\{a + \mathfrak{m}, c + \mathfrak{m}\} = \{a, c\} + \mathfrak{m}$$

deve appartenere a $\mathfrak{m}$, il che significa che $c + \mathfrak{m}$ definisce un elemento in $\operatorname{Cas} A/\mathfrak{m} \cong \mathbb{K}$, da cui otteniamo che c è una costante. Dunque le parentesi definite su $A_{\mathfrak{M}}$ sono simplettiche.

QED

Notiamo che la mappa Π è continua per definizione: rispetto alla topologia di $\operatorname{Spec} A$ gli elementi di Casimir sono funzioni continue! Notiamo inoltre che esiste una topologia più fine su $\operatorname{Spec} A$, che possiamo definire prendendo come base dei suoi aperti le intersezioni degli aperti della topologia spettrale di $\operatorname{Spec} A$ con le fibre della mappa Π, e rispetto alla quale le fibre sono le componenti connesse.

Osserviamo inoltre che questo teorema è la versione formale del teorema di stratificazione simplettica: chiaramente quest'ultimo è più profondo in quanto coinvolge la definizione della struttura differenziabile sulle foglie simplettiche e la differenziabilità della fogliazione singolare da esse determinata.

2.6 Appendice: Spazi Vettoriali di Poisson

Diamo in questa appendice al capitolo un contributo alla definizione del concetto di "spazio vettoriale di Poisson": una tale trattazione manca in letteratura (se si eccettua [63] che però danno una definizione inadeguata che non riesce a catturare l'esempio principale delle parentesi di Lie–Poisson, solo Weinstein accenna brevemente il caso lineare nel suo fondamentale lavoro [104]).

La discussione che qui si propone è parzialmente un caso particolare della teoria delle varietà di Poisson: comunque qui supponiamo di considerare spazi vettoriali qualsiasi; la nostra idea è che si possa edificare una teoria di Poisson per gli spazi vettoriali topologici che intervengono nella teoria delle equazioni differenziali, nella teoria dei campi ed in meccanica quantistica (cfr. e.g. [20]); in altri termini mentre la teoria che abbiamo già esposto va bene anche nel caso non lineare purché di dimensione finita, qui vogliamo dare qualche idea che si estenda, nell'àmbito del caso lineare, a spazi di dimensione infinita; notiamo infine che gli spazi vettoriali considerati saranno su un campo qualsiasi.

2.6.1 Strutture di Poisson lineari

Qui considereremo spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$ qualsiasi. Se $\mathbb{K}$ è un campo valutato non discreto (ad esempio $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) gli spazi vettoriali potranno essere topologici.

Definizione 2.6.1 *Uno spazio vettoriale V si dice* spazio vettoriale di Poisson *se l'algebra simmetrica* $\mathrm{Sym}(V^*)$ *ha una struttura di Poisson.*

La richiesta sull'algebra simmetrica si può motivare in questo modo: un oggetto geometrico è di Poisson se la sua algebra delle funzioni è di Poisson, e la scelta più naturale per uno spazio vettoriale sono i funzionali lineari (e continui nel caso di spazi vettoriali topologici): ovviamente questi non costituiscono un'algebra, ed è naturale considerare l'algebra generata da essi, che è proprio l'algebra simmetrica in V^*, o, equivalentemente, l'algebra dei polinomi in V^*. L'algebra simmetrica ha inoltre il vantaggio di essere un oggetto universale intrinsecamente associato ad ogni spazio vettoriale: se lo spazio vettoriale è topologico, ad esempio uno spazio di Banach, l'algebra simmetrica considerata sarà quella dei tensori simmetrici continui costruita sullo spazio duale topologico.

La definizione precedente non pone alcuna restrizione sulla natura delle parentesi di Poisson, se non che si tratta di funzioni polinomiali: in realtà, per restare nell'algebra lineare e non sconfinare nella geometria algebrica, è necessario imporre la linearità alle funzioni considerate[7]. Prima di limitarci al caso lineare, facciamo però qualche osservazione di carattere generale.

Intanto fissiamo la notazione per l'algebra simmetrica: denoteremo i tensori simmetrici omogenei di grado d su V^* con $\mathrm{Sym}^d(V^*)$, in modo che:

$$\mathrm{Sym}(V^*) = \bigoplus_{d\geq 0} \mathrm{Sym}^d(V^*)$$

e denotiamo i tensori simmetrici di grado d su V^* con $\mathrm{Sym}^{(d)}(V^*)$, in modo che

$$\mathrm{Sym}^{(d)}(V^*) = \bigoplus_{i=0}^{d} \mathrm{Sym}^d(V^*)$$

Questi oggetti corrispondono, fissata una base in V^*, ai polinomi omogenei di grado d ed a tutti i polinomi di grado d in V^*.

Osserviamo che le parentesi di Poisson su $\mathrm{Sym}(V^*)$ sono completamente determinate dai valori che assumono su V^*. Intanto è ovvio che le costanti stiano nel centro dell'algebra di Poisson:

$$\{\mathbb{K}, \mathrm{Sym}(V^*)\} = (0)$$

infatti, se $k \in \mathbb{K}$ e $p \in \mathrm{Sym}(V^*)$, allora

$$\{k, p\} = \{1 \cdot k, p\} = 1\{k, p\} + k\{1, p\} = \{k, p\} + k\{1, p\}$$

e quindi $\{1, p\} = 0$ da cui $\{k, p\} = 0$ per ogni $k \in \mathbb{K}$.

Le parentesi di Poisson sono completamente determinate una volta che siano definite su V^* perché, se per $h + \varphi, k + \psi \in \mathrm{Sym}^{(1)}(V^*) = \mathbb{K} \oplus V^*$, si ha

$$\{h + \varphi, k + \psi\} = \{\varphi, \psi\}$$

e c'è un solo modo di estendere una mappa bilineare antisimmetrica definita su $\mathrm{Sym}^1(V^*)$ a tutto $\mathrm{Sym}(V^*)$ in modo che soddisfi alla bilinearità, antisimmetria e regola di Leibniz. Esplicitamente, un elemento p di $\mathrm{Sym}(V^*)$ è una somma $p_0 + ... + p_d$, ove $p_k \in \mathrm{Sym}^k(V^*)$, cioè $p_k = \sum_{i_0+...+i_r=k} a_{i_0...i_r} v_{i_0}...v_{i_r}$ (per

[7] Questo vuol dire che escludo da questa trattazione le parentesi di Poisson quadratiche o di grado maggiore, che non possono essere trattate con metodi lineari ma che presumibilmente richiedono una teoria delle varietà algebriche di Poisson (teoria che, a quanto mi consta) non è stata ancora considerata.

$v_{i_j} \in V^*$ e $a_{i_0 \dots i_r} \in \mathbb{K}$), e quindi

$$\begin{aligned}
\{p, q\} &= \{\sum_k p_k, \sum_h q_h\} \\
&= \sum_{h,k} \{ \sum_{i_0+\dots+i_r=k} a_{i_0\dots i_r} v_{i_0} \dots v_{i_r}, \sum_{j_0+\dots+j_s=h} b_{j_0\dots j_s} w_{j_0} \dots w_{j_s} \} \\
&= \sum_{k,h} \sum_{i_0+\dots+i_r=k} \sum_{j_0+\dots+j_s=h} \sum_{t,u} v_{i_0} \dots \widehat{v_{i_t}} \dots v_{i_r} w_{j_0} \dots \widehat{w_{j_u}} \dots w_{j_s} \{v_{i_t}, w_{j_u}\}
\end{aligned}$$

(per bilinearità ed identità di Leibniz).

Il fatto che le parentesi di Poisson su uno spazio vettoriale siano completamente determinate dai valori che assumono sulle funzioni lineari è in pieno accordo col ruolo giocato da queste funzioni, che in questo modo si rivelano essere le uniche delle quali la struttura di Poisson tiene conto.

Quindi, in generale, le parentesi di Poisson su uno spazio vettoriale V saranno determinate da

$$\{p, q\} = \sum_{i=0}^{k} \pi_i(p, q)$$

ove $\pi_i : V^* \wedge V^* \longrightarrow \mathrm{Sym}^i(V^*)$ sono tensori che determinano il valore delle parentesi grado per grado.

Definizione 2.6.2

(1) *Le parentesi di Poisson su uno spazio vettoriale V si dicono* omogenee di grado d *se verificano la*

$$\{\mathrm{Sym}^1(V^*), \mathrm{Sym}^1(V^*)\} \subset \mathrm{Sym}^d(V^*)$$

(2) *Le parentesi di Poisson su uno spazio vettoriale V si dicono* graduate *verificano la*

$$\{\mathrm{Sym}^{(i)}(V^*), \mathrm{Sym}^{(j)}(V^*)\} \subset \mathrm{Sym}^{(i+j-1)}(V)$$

Evidentemente uno spazio vettoriale di Poisson graduato può essere omogeneo di grado al più uno, e questo sarà il caso lineare, in cui

$$\{\mathrm{Sym}^i(V^*), \mathrm{Sym}^j(V^*)\} \subset \mathrm{Sym}^{i+j-1}(V^*)$$

Il motivo per il quale si considerano queste restrizioni è semplice: le funzioni alle quali siamo interessati sono i funzionali lineari su V, cioè gli elementi di

V^*, e quello che vogliamo è che la parentesi di Poisson di due funzionali lineari sia al più un funzionale lineare, e non, ad esempio, una funzione quadratica o polinomiale. Dato che $V^* = \mathrm{Sym}^1(V^*)$ deve aversi

$$\{\mathrm{Sym}^1(V^*), \mathrm{Sym}^1(V^*)\} \subset \mathrm{Sym}^1(V^*)$$

e quindi l'imposizione sui tensori simmetrici di grado maggiore è per forza quella considerata nella definizione precedente.

Naturalmente la teoria di Poisson costituisce una generalizzazione della teoria simplettica, quindi il primo (e più semplice) esempio di spazio vettoriale di Poisson devono essere gli spazi vettoriali simplettici.

Gli esempi fondamentali di spazi vettoriali di Poisson li abbiamo già dati come esempi di algebre di Poisson: riformuliamoli brevemente nel contesto puramente lineare, cominciando dagli spazi simplettici.

Esempio 2.6.3 Consideriamo uno spazio vettoriale fortemente simplettico (S, ω) (se dim $S < \infty$ forme deboli e forti coincidono: cfr. [20]): allora la forma simplettica è un tensore fortemente non degenere

$$\omega\ S \wedge S \longrightarrow \mathbb{K}$$

Per definizione, la mappa lineare indotta

$$\omega^b\ S \longrightarrow S^*$$

è un isomorfismo[8]. Quindi resta indotta una mappa bilineare

$$\begin{aligned} \omega'\ S^* \wedge S^* &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \varphi \wedge \psi &\mapsto \omega(\omega^{b-1}(\varphi), \omega^{b-1}(\psi)) \end{aligned}$$

che è ovviamente antisimmetrica e fortemente non degenere. Ponendo

$$\forall k + \varphi, h + \psi \in \mathrm{Sym}^{(1)}(S^*) \qquad \{k + \varphi, h + \psi\} := \omega'(\varphi, \psi)$$

abbiamo delle parentesi di Poisson che si estendono in modo unico, per bilinearità ed identità di Leibniz, a tutta l'algebra $\mathrm{Sym}(S^*)$ e che rendono quindi S uno spazio vettoriale di Poisson. Notiamo che queste parentesi sono *degeneri* nel senso che

$$\{\mathrm{Sym}(S^*), \mathrm{Sym}(S^*)\} \subset \mathrm{Sym}^0(S^*) = \mathbb{K}$$

S risulta quindi uno spazio vettoriale di Poisson non omogeneo.

[8] Se la mappa è solo iniettiva lo spazio è debolmente simplettico e la costruzione che segue si può effettuare solo su un suo sottospazio chiuso (l'immagine isomorfa di S in S^{**}); lo spazio è quindi riflessivo se e solo se una forma debolmente non degenere è fortemente non degenere.

Osserviamo che nell'esempio precedente non è necessario che la forma simplettica sia non degenere: seguendo Souriau definiamo *spazio vettoriale pre-simplettico* uno spazio vettoriale sul quale è fissata una 2-forma, con la struttura di Poisson dell'esempio precedente.

L'altro esempio è, come ci si attende, la struttura di Lie–Poisson:

Esempio 2.6.4 Consideriamo uno spazio vettoriale V il cui duale sia un'algebra di Lie $\mathfrak{g} = V^*$ (ad esempio, se $\mathfrak{g}$ è un'algebra di Lie il cui spazio vettoriale supporto è riflessivo si può considerare $V = \mathfrak{g}^*$). Evidentemente le parentesi di Lie su V^* sono definite da una mappa bilineare antisimmetrica

$$\begin{aligned} \lambda : V^* \wedge V^* &\longrightarrow V^* \\ \varphi \wedge \psi &\mapsto [\varphi, \psi] \end{aligned}$$

Questa mappa, al solito modo, si estende in modo unico a $\mathrm{Sym}(V^*)$ per bilinearità, antisimmetricità ed identità di Leibniz, in modo da rendere V uno spazio di Poisson graduato omogeneo. Cioè le parentesi di Poisson su $\mathfrak{g}^*$ sono le uniche che coincidono, in grado uno, con quelle di Lie

$$\forall \varphi, \psi \in V^* \qquad \{\varphi, \psi\} := [\varphi, \psi]$$

Osserviamo che l'identità di Jacobi per le parentesi di Lie si può riformulare dicendo che l'algebra $\mathrm{Sym}(\mathfrak{g})$ è un $\mathfrak{g}$-modulo se si pone

$$\forall p \in \mathrm{Sym}(\mathfrak{g})\ \forall \varphi \in \mathfrak{g} \qquad p \cdot \varphi = \{p, \varphi\}$$

Se $char(\mathbb{K}) = 0$ una delle formulazioni del Teorema di Poincaré–Birkhoff–Witt è che il morfismo di $\mathbb{K}$-moduli

$$\begin{aligned} \eta : \mathrm{Sym}(\mathfrak{g}) &\longrightarrow U(\mathfrak{g}) \\ \varphi_1 ... \varphi_n &\mapsto \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \varphi\sigma(1) ... \varphi_{\sigma(n)} \end{aligned}$$

è $\mathfrak{g}$-equivariante (rispetto alla struttura di $\mathfrak{g}$-modulo su $\mathrm{Sym}(\mathfrak{g})$):

$$\eta(\{p, \varphi\}) = [\eta(p), \varphi]$$

Otteniamo così, di nuovo, le parentesi di Lie–Poisson.

Qui chiamerò uno spazio vettoriale V dotato delle parentesi di Lie–Poisson, *spazio vettoriale di Lie–Poisson*.

Osserviamo che fra gli spazi vettoriali di Lie–Poisson rientra quello banale: cioè la struttura di Lie–Poisson associata ad un'algebra di Lie V^* abeliana, nella quale le parentesi di Poisson su $\mathrm{Sym}(V^*)$ (che diviene essa stessa algebra inviluppante universale di V^*) sono identicamente nulle.

Naturalmente le parentesi di Lie–Poisson esauriscono gli esempi di spazi vettoriali di Poisson graduati omogenei.

Esempi di parentesi omogenee quadratiche o cubiche sono importanti in certe applicazioni fisiche ed emergono nel contesto delle equazioni di Yang–Baxter (cfr. [49]).

2.6.2 Il tensore di Poisson.

Torniamo agli spazi vettoriali di Poisson in generale, e cerchiamo di caratterizzare la struttura di Poisson in termini di V piuttosto che di $\mathrm{Sym}(V^*)$. Intanto ricordiamo che le parentesi di Poisson si scrivono in termini di un tensore $\pi : V^* \wedge V^* \longrightarrow \mathrm{Sym}(V^*)$ come

$$\{\varphi, \psi\} = \pi(\varphi, \psi)$$

(per $\varphi, \psi \in V^*$) con

$$\pi = \sum_{k=0}^{d} \pi_k$$

(ove $\pi_k : V^* \wedge V^* \longrightarrow \mathrm{Sym}^k(V^*)$). È naturale chiedersi quando un tensore $\pi : V^* \wedge V^* \longrightarrow \mathrm{Sym}(V^*)$ che si decomponga in questo modo dia luogo a delle parentesi di Poisson su V, ed ovviamente l'unica condizione che deve verificare a questo scopo è una caratterizzazione dell'identità di Jacobi per $\{.\}$ in termini di π.

Introduciamo una notazione: intanto richiamiamo che l'algebra simmetrica su uno spazio vettoriale possiede in modo naturale un modulo di differenziali, cioè i differenziali di Kähler Ω^1 che, in virtù della sua proprietà universale (di rappresentare il funtore $Der(--)$) si può identificare nel nostro caso allo spazio $V^* \otimes \mathrm{Sym}(V^*)$. La mappa di differenziazione è

$$\begin{gathered} d : \mathrm{Sym}(V^*) \longrightarrow \Omega^1 \cong V^* \otimes \mathrm{Sym}(V^*) \\ \varphi_1 ... \varphi_n \mapsto \sum_k \varphi_k \otimes \varphi_1 ... \widehat{\varphi_k} ... \varphi_n \end{gathered}$$

Usiamo ora questa notazione per denotare l'estensione di $\pi : V^* \wedge V^* \longrightarrow \mathrm{Sym}(V^*)$ all'algebra simmetrica:

$$\pi(d(\varphi_1 ... \varphi_n), \psi) := \sum_k \varphi_1 ... \widehat{\varphi_k} ... \varphi_n \pi(\varphi_k, \psi)$$

Osserviamo esplicitamente che se $\varphi \in V^*$ allora $d\varphi = \varphi \otimes 1$ che identifichiamo con φ stesso. Ne segue che possiamo considerare l'estensione di π definita su Ω^1: in altre parole avremo

$$\{p, q\} = \pi(dp, dq)$$

Ora torniamo all'identità di Jacobi per le parentesi di Poisson su $\mathrm{Sym}(V^*)$. Nella notazione fissata si ha che

$$\{\{\varphi, \psi\}, \chi\} = \pi(d\pi(\varphi, \psi), \chi)$$

L'espressione $[\pi, \pi]_s(\varphi, \psi, \chi) = 2\pi(d\pi(\varphi, \psi), \chi) + c.p.(\varphi, \psi, \chi)$ è esattamente la parentesi di Schouten di π con se stesso che, come noto, caratterizza i tensori di Poisson sulle varietà, e quindi anche nel nostro contesto, ove però non sembra una caratterizzazione molto significativa.

Quello che possiamo osservare in generale su uno spazio di Poisson qualsiasi è questo

Proposizione 2.6.5 *Le componenti omogenee π_k della mappa π sono 2-cocicli per la rappresentazione banale dell'algebra di Lie* $(\mathrm{Sym}(V^*), \{.\})$.

DIMOSTRAZIONE: Si tratta di una ovvia osservazione: ricordiamo che il complesso standard delle cocatene per un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ a coefficienti in un suo modulo M è definito come

$$C^k(\mathfrak{g}, M) = \{f : \wedge^k \mathfrak{g} \longrightarrow M |\ f \text{ è multilineare}\}$$

mentre l'operatore di cobordo è, per $c \in C^k(\mathfrak{g}, M)$ e $X_0, ..., X_k \in \mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} \delta c(X_0, ..., X_k) = & \sum_{i=0}^{k} (-1)^i X_i \cdot c(X_0, ..., \widehat{X_i}, ..., X_k) + \\ & + \sum_{i<j}^{0...k} (-1)^{i+j+1} c([X_i, X_j], X_0, ..., \widehat{X_i}, ..., \widehat{X_j}, ..., X_k) \end{aligned}$$

Allora abbiamo

$$\sum_k \delta\pi_k(\varphi, \psi, \chi) = \pi(d\{\varphi, \psi\}, \chi) + c.p.(\varphi, \psi, \chi) = \{\{\varphi, \psi\}, \chi\} = 0$$

che, grado per grado, ci dà la condizione di cociclo.

QED

Naturalmente questa condizione è ben lungi dall'essere una caratterizzazione della struttura di Poisson su V. Per rendersene conto basta scrivere grado per grado l'identità di Jacobi in termini delle π_k: per brevità poniamo

$$A_{ij} := \pi_i(d\pi_j(\varphi, \psi), \chi)$$

Allora

$$\{\{\varphi, \psi\},\chi\} =$$

Pertanto le parentesi indotte da π sono di Poisson se e solo se

$$\sum_{i+j=n\, j>0} A_{ij} = 0 \qquad\qquad n = 1, 2, ..., d$$

Un caso particolare è quello in cui gli elementi A_{ij} con $j \neq 1$ sono tutti nulli. Questo significa che le uniche relazioni da imporre saranno

$$\pi_n(d\pi_1(\varphi, \psi), \chi) + c.p.(\psi, \varphi, \chi) = 0 \qquad\qquad n = 1, 2, ..., d$$

Queste relazioni significano esattamente che il tensore $\pi_1 : V^* \wedge V^* \longrightarrow V^*$ definisce su V^* una struttura di algebra di Lie (equazione precedente per $n = 1$), mentre le altre relazioni significano esattamente che π_n sono 2-cocicli per la rappresentazione banale dell'algebra di Lie V^* definita da π_1. Quindi queste strutture di Poisson su V sono parametrizzate dalle possibili estensioni delle strutture di algebre di Lie su V^*.

Come esempio di questa situazione, consideriamo le parentesi graduate, cioè le parentesi indotte dalla mappa $\pi = \pi_0 + \pi_1$. In questo caso l'identità di Jacobi per le parentesi di Poisson si riduce a due sole identità in V^*:

$$\begin{aligned} 0 &= \{\{\varphi, \psi\}, \chi\} + c.p.(\varphi, \psi, \chi) \\ &= \{\pi_1(\varphi, \psi) + \pi_0(\varphi, \psi), \chi\} + c.p.(\varphi, \psi, \chi) \\ &= \{\pi_1(\varphi, \psi), \chi\} + c.p.(\varphi, \psi, \chi) \\ &= \pi_1(\pi_1(\varphi, \psi), \chi) + \pi_0(\pi_1(\varphi, \psi), \chi) + c.p.(\varphi, \psi, \chi) \end{aligned}$$

cioè, ponendo $[\varphi, \psi] := \pi_1(\varphi, \psi)$:

$$[[\varphi, \psi], \chi] + c.p.(\varphi, \psi, \chi) = 0$$

e

$$\pi_0([\varphi, \psi], \chi) + c.p.(\varphi, \psi, \chi) = 0$$

La prima equazione ci dice che π_1 induce su V una struttura di algebra di Lie, la seconda che π_0 è un 2-cociclo per la coomologia di quest'algebra. Come noto, il gruppo di coomologia $H^2(\mathfrak{g})$ di un'algebra di Lie parametrizza le classi di equivalenza di estensioni

$$0 \longrightarrow \mathbb{K} \longrightarrow \mathfrak{g} \oplus \mathbb{K} \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

e quindi l'algebra di Lie $\mathrm{Sym}^{(1)}(V^*)$ rispetto alle parentesi di Poisson è estensione centrale dell'algebra di Lie V^* rispetto alle parentesi di Lie $[.]$ indotte da π_1 per mezzo del cociclo π_0. Queste parentesi di Poisson sono note in letteratura e chiamate *parentesi di Lie–Poisson affini*: nel nostro linguaggio, costituiscono il caso più generale di parentesi di Poisson graduate su uno spazio vettoriale; notiamo che il caso $\pi_1 = 0$ è quello degli spazi simplettici, ove π_0 è la versione controvariante della forma simplettica (quella che nell'esempio 2.6.3 è denotata ω'), mentre nel caso di uno spazio di Lie–Poisson $\pi_0 = 0$ e π_1 è il tensore $\pi_1(\varphi, \psi) = [\varphi, \psi]$.

Osserviamo che l'esempio precedente si può formulare in modo generale nei termini seguenti: se V è uno spazio di Poisson rispetto alle mappe π e π' allora la mappa $\pi + \pi'$ pure induce una struttura di Poisson su V se e solo se

$$\pi'(d\pi(\varphi, \psi), \chi) + c.p.(\varphi, \psi, \chi) = 0$$

Infatti come abbiamo visto l'identità di Jacobi per le parentesi di Poisson indotte da π equivale all'annullarsi delle parentesi di Schouten $[\pi, \pi]_s$, e quindi $\pi + \pi'$ induce una struttura di Poisson se e solo se

$$0 = [\pi + \pi', \pi + \pi']_s = [\pi, \pi']_s + [\pi', \pi]_s = 2[\pi', \pi]_s$$

dato che, come è ovvio constatare, $[\pi, \pi']_s = [\pi', \pi]_s$ (in generale le parentesi di Schouten sono definite sull'algebra completa dei tensori antisimmetrici, e la rendono un'algebra di lie graduata, così nel caso di tensori di rango due sono simmetriche). Questa condizione è esattamente quella precedente e, se è verificata, diciamo che le strutture di Poisson π e π' sono *compatibili*.

Osserviamo inoltre che, se $\rho : \wedge^k V^* \longrightarrow \mathrm{Sym}\ V^*$ è un tensore allora possiamo definire il tensore $\delta\rho : \wedge^{k+1} V^* \longrightarrow \mathrm{Sym}\ V^*$ come

$$\begin{aligned}\delta\rho(\varphi_0 \wedge \dots \wedge \varphi_k) = \sum_i \pi(d\rho(\varphi_0 \wedge \dots \wedge \widehat{\varphi}_i \wedge \dots \wedge \varphi_k), \varphi_i) + \\ + \sum_{i<j} \rho(d\pi(\varphi_i, \varphi_j), (\varphi_0 \wedge \dots \wedge \widehat{\varphi}_i \wedge \dots \wedge \widehat{\varphi}_j \wedge \dots \wedge \varphi_k))\end{aligned}$$

In questo modo, l'operatore δ soddisfa alla condizione $\delta\delta = 0$ e quindi induce una coomologia che si dice *coomologia di Poisson* dello spazio V rispetto alla struttura di Poisson π. L'ostruzione a che il tensore $\pi+\pi'$ sia ancora di Poisson è quindi di natura coomologica, ed anzi ogni struttura di Poisson compatibile con π dà luogo ad una classe di coomologia (di grado due) di Poisson.

Dall'analisi precedente possiamo concludere che una famiglia di strutture di Poisson $\{\pi_k\}$ su uno stesso spazio vettoriale V tale che, per ogni h e per ogni k: $[\pi_h, \pi_k] = 0$ dà luogo ad una nuova struttura di Poisson $\sum_k \pi_k$ su V che chiamerò *sovrapposizione* delle $[\pi_k\}$. L'esempio più semplice è proprio quello delle parentesi di grado uno, i.e. affini, che abbiamo considerato più sopra.

Notazione 2.6.6 *Converremo d'ora innanzi di identificare gli spazi vettoriali di Poisson con le coppie (V, π) ove $\pi : V^* \wedge V^* \longrightarrow \mathrm{Sym}\ V^*$ è la mappa che determina la struttura di Poisson di V.*

La mappa di Poisson π è determinata dalle sue componenti omogenee $\pi_0, ..., \pi_d$: cerchiamo allora di vedere come la struttura di Poisson si comporta grado per grado. Raffiniamo la nostra notazione differenziale, introducendo le mappe

$$\begin{aligned} d^k : \mathrm{Sym}\ V^* &\longrightarrow \bigwedge^k V^* \otimes \mathrm{Sym}\ V^* \\ \varphi_1 ... \varphi_n &\mapsto \sum_{i_1 ... i_k} \varphi_{i_1} \wedge ... \wedge \varphi_{i_k} \otimes \varphi_1 ... \widehat{\varphi}_{i_1} ... \widehat{\varphi}_{i_k} ... \varphi_n \end{aligned}$$

(notiamo che $d^1 = d$ secondo la notazione precedente, e che se $n < k$ allora $d^k(\varphi_1 ... \varphi_n) = 0$).

Proposizione 2.6.7 *Se (V, π) è uno spazio di Poisson allora il duale V^* è un'algebra di Lie rispetto alle parentesi*

$$[\varphi, \psi] = d^1\pi(\varphi, \psi)$$

DIMOSTRAZIONE: Infatti $[[\varphi, \psi], \chi] = d^1\pi(d^1\pi(\varphi, \psi), \chi) = d^1\{\{\varphi, \psi\}, \chi\}$ e quindi l'identità di Jacobi per le parentesi di Poisson implica quella per le parentesi $[.]$.

QED

Ovviamente la mappa d^1 risulta un morfismo fra le algebre di Lie $\mathrm{Sym}\ V^*$ e V^*:

$$d^1\{p, q\} = [d^1p, d^1q]$$

e la struttura di Lie $[.]$ è abeliana se e solo se le parentesi di Poisson sono degeneri (i.e. l'immagine di π è contenuta in $\mathbb{K}$).

2.6.3 Sottospazi caratteristici

Torniamo ora agli spazi vettoriali di Poisson generali, sui quali faremo l'ipotesi che siano spazi vettoriali topologici riflessivi (ad esempio di dimensione finita).

Definizione 2.6.8 *Se V è uno spazio di Poisson le cui parentesi siano indotte dalla mappa π, e se $v \in V$ allora la* mappa di Poisson *in v è*

$$\begin{aligned} \pi_v : V^* \wedge V^* &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \varphi \wedge \psi &\mapsto \pi(\varphi, \psi)(v) \end{aligned}$$

*mentre l'*operatore di Poisson *in v è la mappa indotta*

$$\begin{aligned} \pi_v^{\#} : V^* &\longrightarrow V^{**} \cong V \\ \varphi &\mapsto (\psi \mapsto \pi(\varphi, \psi)(v)) \end{aligned}$$

Definizione 2.6.9 *Il* sottospazio caratteristico *di V in $v \in V$ è lo spazio vettoriale $Im\ \pi_v^{\#}$.*

Si rammenti che il rango di V in v è la dimensione $\text{rango}_V v$ del sottospazio caratteristico in v (scriveremo semplicemente $\text{rango}\, v$).

Definizione 2.6.10 *Se per ogni $v \in V$* $\text{rango}(v) < \infty$ *allora lo spazio si dice* localmente di rango finito*, e se esiste un intero r tale che per ogni $v \in V$ $rk(v) \leq r$ lo spazio si dice* di rango finito *ed il suo rango è il minimo degli r che soddisfano la relazione precedente per ogni $v \in V$.*

Ovviamente in dimensione finita queste nozioni coincidono.

Sappiamo che il rango è una funzione semicontinua inferiormente (non può cioè decrescere in un intorno di $v \in V$), come pure sappiamo che non è detto che sia costante in un intorno aperto di v, e se lo è il punto si dice regolare. Se lo spazio è di rango finito allora abbiamo visto che l'insieme dei punti regolari è denso. In particolare, nel caso di spazi di rango finito, la struttura di Poisson è determinata sui punti regolari.

Rammentiamo inoltre che uno spazio è regolare se ogni suo punto lo è: ad esempio lo spazio di Lie–Poisson $V = \mathfrak{g}^*$ associato all'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ non lo è mai: il punto $0 \in \mathfrak{g}^*$ ha infatti addirittura rango nullo, dato che se $\varphi, \psi \in V$ allora $\pi(\varphi, \psi)(0) = [\varphi, \psi](0) = 0$ (un funzionale lineare è sempre nullo in 0).

Più in generale, l'origine di un qualsiasi spazio di Poisson omogeneo di grado ≥ 1 ha rango nullo. Un punto di rango nullo lo chiamiamo *singolare*.

Il seguente teorema determina la struttura di ogni spazio vettoriale di Poisson, ed è una versione lineare del teorema di Weinstein sulla struttura locale delle varietà di Poisson (cfr. [104]).

Teorema 2.6.11 *Se V è uno spazio vettoriale di Poisson allora per ogni $v \in V$ esistono due sottospazi vettoriali S_v e N_v di V tali che:*

(1) $V = S_v \oplus N_v$.

(2) *Lo spazio S_v è simplettico rispetto alle parentesi di Poisson indotte da V, mentre lo spazio N_v ha rango nullo in v (e quindi le parentesi di Poisson indotte da V su N_v sono identicamente nulle in v).*

(3) *I sottospazi S_v e N_v sono univocamente determinati dalle* (1)-(2).

DIMOSTRAZIONE: Per $v \in V$, consideriamo il sottospazio vettoriale di V $S_v := \operatorname{im} \pi_v^\#$: se $V = S_v$ (i.e. se la mappa $\pi_v^\#$ è un isomorfismo) allora l'inversa $\omega_v^b : V \longrightarrow V^*$ di $\pi_v^\#$ corrisponde ad una forma simplettica (fortemente non degenere) $\omega_v : V \wedge V \longrightarrow \mathbb{K}$ che rende V uno spazio simplettico. Per il teorema di Darboux, se $v \neq v'$ si ha comunque $\omega_v \cong \omega_{v'}$ su $S_v = S_{v'}$. Prendendo $N_v = 0$ si ha quindi la tesi, dato che la struttura di Poisson indotta da ω su V coincide con quella associata a π.

Se $S_v := \operatorname{im} \pi_v^\#$ è un sottospazio proprio di V, allora il ragionamento precedente implica che S_v è simplettico rispetto alla struttura di Poisson indotta da π. Infatti $S_v = \operatorname{im} \pi_v^\# = V^* / \ker \pi_v^\#$ e quindi π_v induce sul quoziente una forma bilineare antisimmetrica

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_v : S_v \wedge S_v &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \overline{\varphi} \wedge \overline{\psi} &\longmapsto \pi_v(\varphi, \psi) \end{aligned}$$

Questa forma è ben definita e non degenere in quanto, se esiste $\overline{\varphi}$ tale che per ogni $\overline{\psi}$ si abbia $\tilde{\pi}_v(\overline{\varphi}, \overline{\psi}) = 0$ allora

$$\forall \psi \in V^* \ \forall \chi \in Ker\ \pi_v^\# \quad 0 = \pi_v(\varphi, \psi + \chi) = \pi_v(\varphi, \psi)$$

cioè $\varphi \in Ker\ \pi_v$ e quindi $\overline{\varphi} = 0$.

Allora V/S_v è isomorfo ad un sottospazio N_v di V tale che valga la (1): evidentemente il tensore di Poisson $\pi_v|_{N_v}$ è zero.

QED

Un chiarimento importante che merita il teorema, è che i sottospazi S_v si immergono in V, al variare di $v \in V$ come sottovarietà affini e che solo S_0 è propriamente un sottospazio vettoriale di V: per questo motivo la decomposizione $V \cong S_v \oplus N_v$ è solo a meno di isomorfismi (precisamente della traslazione che porta v in 0).

Dato che intorno ad un punto regolare il rango è costante, una immediata conseguenza del teorema è che

Corollario 2.6.12 *Se il punto v è regolare allora nella decomposizione del teorema precedente lo spazio N_v ha parentesi di Poisson identicamente nulle.*

Anche se è implicito nella dimostrazione del teorema, osserviamo che se V è regolare allora nella decomposizione $V = S \oplus N$, la restrizione di π a S è simplettica mentre, dato che N è il nucleo di $\pi_v^\#$ per ogni $v \in V$ le parentesi di Poisson sono identicamente nulle su V, e quindi l'immagine di π è $\mathbb{K}$, cioè $\pi : V^* \wedge V^* \longrightarrow \mathbb{K}$ determina (ed è determinato da) una forma presimplettica $\omega : V \wedge V \longrightarrow \mathbb{K}$. In altri termini, se la mappa $\pi : V^* \wedge V^* \longrightarrow \mathrm{Sym}\ V^*$ è non degenere, nel senso che se per ogni $\psi \in V^*$ si ha $\pi(\varphi, \psi) = 0$ allora $\varphi = 0$, l'immagine di π è tutta contenuta in $\mathrm{Sym}^0(V^*) = \mathbb{K}$. Infatti $\pi(\varphi, \psi)$ è una funzione polinomiale, e quindi invertibile se e solo se priva di termini di grado positivo. Così

Corollario 2.6.13 *Uno spazio di Poisson regolare è presimplettico.*

Dalla dimostrazione del teorema segue pure il

Corollario 2.6.14 *Se esiste un punto $v \in V$ nel quale il rango è massimo (i.e. $\mathrm{rango}(v) = dim\ V$) allora la struttura di Poisson su V è simplettica. Se lo spazio V ha dimensione finita, allora il teorema 5 implica che esistono delle coordinate (dipendenti da v) $(p_1, ..., p_n, q_1, ..., q_n, z_1, ..., z_r)$ in V^* tali che*

$$\begin{aligned} \{p_i, p_j\} = \{q_i, q_j\} = \{z_i, \varphi\} = 0 \\ \{p_i, q_j\} = \delta_{ij} \\ \{z_i, z_j\}(v) = 0 \end{aligned}$$

(per ogni $\varphi \in V^*$).

Nel caso degli spazi regolari, le funzioni $\{z_i\}$ generano il centro dell'algebra di Lie $(\mathrm{Sym}\ V^*, \{.\})$, e nella base fissata la matrice associata a π si scrive

$$\pi = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

In generale, fissata una qualsiasi base $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ di V, le entrate $((\pi_{ij}))$ della matrice $d\pi$ sono $\pi_{ij} = \{\varphi_i, \varphi_j\}$.

2.6.4 Il Gruppo di Poisson

Un fatto fondamentale che non abbiamo menzionato è che gli spazi vettoriali di Poisson formano una categoria: naturalmente dobbiamo specificarne i morfismi, e giè sappiamo quali sono: le mappe di Poisson, cioè le applicazioni

$A : V \longrightarrow W$ che inducono un morfismo di algebre associative e algebre di Lie fra Sym W^* e Sym V^*.

Questo significa che la mappa

$$\begin{aligned} A^* : \text{Sym } W^* &\longrightarrow \text{Sym } V^* \\ p &\mapsto p \circ A \end{aligned}$$

deve soddisfare alle

$$\{A^*p, A^*q\}_V = A^*\{p,q\}_W \qquad \text{e} \qquad A^*(p \cdot q) = (A^*p)(A^*q)$$

Quindi, per l'identità di Leibniz, A^* è determinata su W^*, nel senso che i morfismi fra due spazi di Poisson (V,π) e (W,ρ) sono esattamente le mappe $A : V \longrightarrow W$ tali che

$$\forall \varphi, \psi \in W^* \quad \{\varphi \circ A, \psi \circ A\}_V = \{\varphi, \psi\}_W \circ A$$

ovvero,

$$\rho^{\#}_{Av} = A^* \pi^{\#}_v A^*$$

dato che, per ogni $v \in V$ e $\varphi, \psi \in W^*$:

$$\begin{aligned} (\rho^{\#}_{Av}\varphi)(\psi) &= \rho(\varphi,\psi)(Av) = \pi(A^*\varphi, A^*\psi)(v) \\ &= (\pi^{\#}_v A^*\varphi)(A^*\psi) = A^*(\pi^{\#}_v A^*\varphi)(\psi) \end{aligned}$$

Introduciamo le altre nozioni fondamentali nella categoria degli spazi di Poisson.

Definizione 2.6.15 *Un sottospazio vettoriale W di uno spazio di Poisson (V,π) si dice* sottospazio di Poisson *se è uno spazio di Poisson, diciamo rispetto ad una mappa ρ, e se l'immersione $W \hookrightarrow V$ è una mappa di Poisson.*

In modo equivalente, W è un sottospazio di Poisson di V se la suriezione Sym $V^* \longrightarrow$ Sym W^* è un morfismo di algebre di Lie oppure, ancora, se il sottospazio $Ann_V(W)$ di V^* è un ideale dell'algebra di Lie $(V^*, [.])$.

I prodotti nella categoria degli spazi di Poisson sono facilmente identificabili grazie alle proprietà funtoriali dell'algebra simmetrica: se V_1 e V_2 sono spazi di Poisson, allora le algebre simmetriche sono algebre di Lie e le parentesi di Lie

$$\{\varphi_1 \otimes \varphi_2, \psi_1 \otimes \psi_2\}_{12} := \{\varphi_1, \psi_1\}_1 \otimes \varphi_2\psi_2 + \varphi_1\psi_1 \otimes \{\varphi_2, \psi_2\}_2$$

sono le uniche a rendere il prodotto tensoriale Sym $V_1^* \otimes$Sym $V_2^* = \text{Sym}(V_1^* \times V_2^*)$ un'algebra di Poisson tale che la restrizione delle parentesi $\{.\}_{12}$ a V_i

coincida con $\{.\}_i$ $(i = 1, 2)$ e tale che le funzioni definite su un singolo fattore commutino con quelle definite sull'altro: se φ dipende solo da V_1 e ψ dipende solo da V_2 allora $\{\varphi, \psi\}_{12} = 0$.

Evidentemente i fattori V_1 e V_2 si immergono in $V_1 \oplus V_2$ come sottospazi di Poisson e, per definizione, le proiezioni da $V_1 \oplus V_2$ su fattori V_1 e V_2 sono pure mappe di Poisson.

Ad esempio possiamo formare il prodotto degli spazi di Poisson che meglio conosciamo: quelli simplettici e quelli di Lie–Poisson. Così $S \otimes \mathfrak{g}^*$ sarà uno spazio di Poisson le cui parentesi sono completamente determinate da quelle simplettiche di S e da quelle lineari omogenee di $\mathfrak{g}^*$: questo spazio *non è regolare*: infatti non lo è $\mathfrak{g}^*$, dato che, ad esempio, ha un punto singolare nell'origine, e quindi per ogni $s \in S$, il punto $s \oplus 0 \in S \oplus \mathfrak{g}^*$ non è regolare.

Concentriamoci ora sui morfismi di Poisson fra due spazi V e W. Una ulteriore (ed ovvia) caratterizzazione è la seguente: $A : V \longrightarrow W$ è di Poisson se e solo se per ogni campo hamiltoniano X_φ si ha

$$A^* X_{\varphi \circ A} = X_\varphi$$

Questo implica che $S_{Av} = A(S_v)$ e quindi

$$\text{rango}_V(v) \geq \text{rango}_W(Av)$$

In particolare

Corollario 2.6.16 *Un morfismo di Poisson $A : V \longrightarrow W$ fra uno spazio di Poisson V ed uno spazio simplettico W è sempre suriettivo.*

Proposizione 2.6.17

(1) *Se $A : V \longrightarrow W$ è un morfismo di Poisson invertibile, allora anche A^{-1} è di Poisson.*

(2) *Se $A : V \longrightarrow W$ e $B : W \longrightarrow Z$ sono morfismi di Poisson anche $B \circ A$ lo è. Se A è di Poisson ed è suriettivo e se $B \circ A$ è di Poisson, allora B è di Poisson.*

DIMOSTRAZIONE: (1) Per ogni $w \in W$ esiste per ipotesi un $v \in V$ tale che $Av = w$ e quindi, per ogni $w \in W$:

$$\begin{aligned}
\rho(\varphi A^{-1}, \psi A^{-1})(w) &= \rho(\varphi A^{-1}, \psi A^{-1})(Av) \\
&= \pi(\varphi A^{-1} A, \psi A^{-1} A)(v) \\
&= \pi(\varphi, \psi)(A^{-1} v)
\end{aligned}$$

(2) Il primo enunciato è ovvio. Per quel che concerne il secondo, per ogni $w \in W$ esiste un $v \in V$ tale che $w = Av$ (suriettività di A) e quindi

$$\begin{aligned}\pi_W(\varphi B, \psi B)(w) &= \pi_W(\varphi B, \psi B)(Av) = \pi_V(\varphi BA, \psi BA)(v) \\ &= \pi_V(\varphi, \psi)(B(Av)) = \pi(\varphi, \psi)(Bw)\end{aligned}$$

QED

Definizione 2.6.18 *Se (V, π) è uno spazio vettoriale di Poisson allora il* gruppo (lineare) di Poisson $Ps(V)$ *è il gruppo delle applicazioni lineari invertibili (e continue) di Poisson.*

In generale una mappa di Poisson non è necessariamente lineare (né continua): infatti il gruppo degli isomorfismi di Poisson di uno spazio è in generale un "gruppo algebrico" di dimensione infinita. Invece il gruppo lineare di Poisson è evidentemente un sottogruppo chiuso (algebrico) di $GL(V)$.

Se V è uno spazio simplettico, allora $Ps(V) = Sp(V)$, mentre se $V = \mathfrak{g}^*$ è uno spazio di Lie–Poisson $Ps(V) = Aut(\mathfrak{g})$ è il gruppo degli automorfismi dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$.

Teorema 2.6.19 *La categoria degli spazi vettoriali simplettici è una sottocategoria piena della categoria degli spazi di Poisson.*

DIMOSTRAZIONE: Se $A : V \longrightarrow W$ è un morfismo fra spazi di Poisson allora

$$\pi_V(A^*\varphi, A^*\psi) = A^*\pi(\varphi, \psi)$$

Ma dato che V e W sono simplettici, le loro mappe di Poisson π_V e π_W sono invertibili e danno luogo a due forme simplettiche ω_V e ω_W che in virtù della condizione precedente soddisfano alla

$$\omega_V(Av, Aw) = \omega_W(v, w)$$

Cioè A è simplettico.

QED

Proposizione 2.6.20 *Uno spazio vettoriale simplettico non ha sottospazi di Poisson propri.*

DIMOSTRAZIONE: Infatti se $\iota : W \hookrightarrow V$ è una mappa di Poisson, per il corollario 3. deve essere suriettiva e quindi è la mappa id_V.

QED

Consideriamo ora i sottospazi di uno spazio di Lie–Poisson $V = \mathfrak{g}^*$: devono essere sottospazi di V la cui iniezione canonica $\iota : W \hookrightarrow V$ sia una mappa di Poisson, i.e.

$$\forall w \in W \quad \pi_W(\varphi\iota, \psi\iota)(w) = [d\varphi, d\psi](w)$$

quindi W è un sottospazio di Poisson se e solo se $Ann_V(W)$ è un ideale dell'algebra di Lie $\mathfrak{g} = V^*$. In questo caso la struttura di Lie–Poisson che l'algebra di Lie $\mathfrak{g}/Ann_V(W)$ induce sul suo duale (che è isomorfo a W) è esattamente la struttura di Poisson di W, cioè un sottospazio di Poisson di uno spazio di Lie–Poisson V è sempre della forma $(\mathfrak{g}/\mathfrak{i})^*$ ove $\mathfrak{i}$ è un ideale dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$.

Ad esempio, se l'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è semisemplice, lo spazio di Lie–Poisson associato non ha sottospazi di Poisson[9].

2.6.5 Struttura del Gruppo di Poisson

Vogliamo ora affrontare l'analisi della struttura del gruppo di Poisson $Ps(V)$ di uno spazio (V, π). Per prima cosa considereremo il caso di uno spazio regolare: cioè V sarà uno spazio di Poisson che si decompone come $V = S \oplus N$. Naturalmente, *a priori*, i sottospazi S e N non sono di Poisson, ma nel caso regolare questo è vero: infatti N lo è banalmente, dato che la sua struttura di Poisson è zero, (sappiamo che uno spazio regolare è presimplettico) e quindi se $\iota : N \hookrightarrow V$ è la sua immersione in V allora

$$\{\varphi\iota, \psi\iota\}_N = 0 = \{\varphi, \psi\}_V \iota$$

dato che le parentesi di Poisson di V sono nulle su N. Che S sia un sottospazio di Poisson di V segue dal fatto che la mappa $\iota : S \hookrightarrow V$ è simplettica e quindi

$$\{\varphi\iota, \psi\iota\}_S = \omega(\iota^* X_\varphi, \iota^* X_\psi) = \omega(X_\varphi, X_\psi) = \{\varphi, \psi\}_V \iota$$

così la decomposizione $V = S \oplus N$ è una somma diretta di spazi di Poisson (ovviamente pensiamo a S come a S_0, dato che per $v \neq 0$ S_v è solo un sottospazio affine di V, il cui spazio vettoriale è isomorfo a S_0 tramite la traslazione di v in 0).

Dato che V è regolare, il tensore π ha solo elementi di grado zero e quindi è completamente determinato da una forma bilineare antisimmetrica

$$\omega : V \wedge V \longrightarrow \mathbb{K}$$

[9]È questo il caso di $\mathfrak{so}(3)$, la cui struttura di Poisson è implicita nei lavori di Euler sulla meccanica dei corpi rigidi.

Il gruppo di Poisson è quindi in questo caso il gruppo degli elementi $A \in GL(V)$ tali che

$$\omega(Av, Aw) = \omega(v, w)$$

(pensando ω e A come matrici: $A^T\omega A = \omega$, ovvero, $A^*\omega^b A = \omega^b$).

Osserviamo ora che il sottospazio N è stabile per l'azione del gruppo di Poisson:

$$Ps(V) \cdot N \subset N$$

infatti, se $n \in N$ si ha che per ogni $v \in V$ $\omega(An, v) = \omega(n, A^{-1}v) = 0$ i.e. $An \in N$. Quindi se $A \in PS(v)$ restano definite due applicazioni lineari $A|_N \in GL(N)$ e

$$\begin{aligned} \tilde{A} : V/N &\longrightarrow V/N \\ v + N &\mapsto Av + N \end{aligned}$$

che ovviamente è un simplettomorfismo di $V/N \cong S$.

Non è però in generale vero che $Ps(V)$ stabilizzi S: ad esempio, se $N = \mathbb{K}$ (con la coordinata z) e $S = \mathbb{K} \oplus \mathbb{K}$ munito delle coordinate simplettiche (p, q) allora la trasformazione

$$\begin{aligned} A : S \oplus N &\longrightarrow S \oplus N \\ (p + q, z) &\mapsto (p - q, p + q + z) \end{aligned}$$

è in $Ps(V)$ dato che $A^T\omega A = \omega$ (infatti $A^T\omega A(p+q, z) = A^T\omega p-q, p+q+z) = A^T(-q-p, 0) = (q-p, 0) = \omega(p+q, z))$ mentre $A(p+q, 0) = (p-q, p+q) \notin S)$.

Ovviamente sia $GL(N)$ che $Sp(S)$ sono sottogruppi di $Ps(V)$: se $A \in Ps(V)$, scriviamo $Av = A_s v + A_n v$ secondo la decomposizione di $V = S \oplus N$.

Se $A \in Ps(V)$ allora per ogni elemento $v = s + n \in V$:

$$A(s + n) = As + An = A_s s \oplus (A_n s + A_n n)$$

e si ha

$$\begin{aligned} \omega^b(s + n) &= A^*\omega^b A(s + n) \\ &= A^*(\omega^b(A_s s) + \omega^b(A_n s) + \omega^b(A_n n) \\ &= A^*\omega^b A_s(s) * A^*\omega^b A_n(s) \end{aligned}$$

quindi

$$\omega^b(s) = A^*\omega^b A_s(s) \qquad \text{e} \qquad \omega^b A_n(s) = 0$$

Dunque $A \in Ps(V)$ se e solo se $A_s|_S \in Sp(S)$, $A_n|_S = 0$ e $A|_N \in GL(N)$. Nel séguito scriveremo $A = A_s + A_n + A_m$ ove $A_s \in Sp(S)$, $A_n \in GL(N)$ e

$A_m : S \longrightarrow N$. Osserviamo che non esiste alcuna imposizione su A_m, che è quindi una qualsiasi applicazione lineare fra S e N.

Questa decomposizione per un elemento di $Ps(V)$ è evidentemente unica, i.e.

$$Ps(V) = Sp(S) \cdot GL(N) \cdot Hom(S, N)$$

È pure ovvio che questo prodotto non è diretto.

Ad esempio, se $\dim V < \infty$, possiamo fissare una base $(p_1, ..., p_r, q_1, ..., q_r, z_1, ..., z_k)$ standard nella quale

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Allora un elemento di $Ps(r, k) = Ps(V)$ è una matrice invertibile A tale che $\omega = A^T \omega A$ i.e.

$$A = \begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{X} & 0 \\ & & 0 \\ y & z & c \end{pmatrix}$$

ove $X \in Sp(S)$, $c \in GL(N)$ e y e z sono matrici $k \times r$. Infatti, se

$$A = \begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{X} & a \\ & & b \\ y & z & c \end{pmatrix}$$

deve aversi $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ n' \end{pmatrix}$ e quindi $a = b = 0$. Inoltre la relazione $A^T \omega A = \omega$ si scrive:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} X^T & & y^T \\ & & z^T \\ 0 & 0 & c^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & & 0 \\ & & 0 \\ y & z & c \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} X^T J & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & & 0 \\ & & 0 \\ y & z & c \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} X^T J X & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(ove $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$) i.e. $X \in Sp(S)$. Che, infine debba essere $c \in GL(N)$ segue ovviamente dal fatto che A è invertibile e $\det(A) = \det(X) \det(c) = \det(c)$.

Dalla decomposizione precedente è chiaro che c'è solo una immersione (che sia un omomorfismo di gruppi) del gruppo additivo $Hom(S,N)$ in $Ps(V)$:

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ & 0 \\ a & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & 0 \\ & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^2 & 0 \\ & 0 \\ aX+cb & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & 0 \\ & 0 \\ a+b & c \end{pmatrix}$$

se e solo se $X^2 = X$ e $c^2 = c$ e per ogni a, b $aX + c = a + b$, i.e. se e solo se $X = I$ e $c = I$.

Scriviamo ora la formula del prodotto di due morfismi di Poisson in termini della decomposizione $A = A_s + A_n + A_m$:

$$\begin{aligned}(A_s + A_n + A_m)(B_s + B_n + B_m) &= (A_s B_s) + (A_n + A_m)(B_s + B_n + B_m)\\ &= A_s B_s + (A_n(B_n + B_m) + A_m B_s)\\ &= A_s B_s + A_n B_n + (A_n B_m + A_m B_n)\end{aligned}$$

Ora, dato che c'è solo un'immagine omomorfa di $Hom(S,N)$ in $Ps(V)$, deve essere

$$Hom(S,N) \lhd Ps(V)$$

e quindi

$$Ps(V)/Hom(S,N) \cong Sp(S) \times GL(N)$$

Questo però non significa che $Ps(V)$ è prodotto semidiretto di $Sp(S)\times GL(N)$ con $Hom(S,N)$: certamente ne è una estensione centrale, e corrisponde ad un tipo più generale di prodotto fra gruppi, che possiamo assiomatizzare come segue:

Definizione 2.6.21 *Se G, H e K sono gruppi, con K abeliano, e se ci sono i morfismi*

$$\alpha\, G \longrightarrow Aut(K) \qquad\qquad \beta\, H \longrightarrow Aut(K)^{op}$$

(i.e. $\alpha(gg') = \alpha(g)\alpha(g')$ e $\beta(hh') = \beta(h')\beta(h)$) allora sull'insieme $G \times H \times K$ l'operazione

$$(g,h,k)(g',h',k') := (gg', hh', \alpha(g')k + \beta(h)k')$$

indice una struttura di gruppo che denotiamo $G \xrightarrow{K}\!\bowtie H$.

Si può dimostrare che $K \lhd G \xrightarrow{K}\!\bowtie H$ e che se $H = \{e\}$ allora questa nozione coincide con quella di prodotto semidiretto $G \ltimes K$.

Osserviamo che, se $2r = dim\ S$ e $k = dim\ N$ allora $dim\ Ps(V) = dim\ Sp(S) + dim\ GL(N) + dim\ Hom(S,N) = r(2r+2) + k(k+r)$.

Determiniamo ora l'algebra di Lie del gruppo algebrico $Ps(V)$: sia $\{A_t\}_{t\in\mathbb{K}}$ una famiglia ad un parametro di elementi di $Ps(V)$ (tale che cioè $A_o = Id_V$). La mappa

$$P_A := \left(\frac{dA_t}{dt}\right)_{t=0}$$

si dice *trasformazione di Poisson infinitesima* di A_t. Dato che $\omega(A_t v, A_t w) = \omega(v,w)$, derivando si ha la proprietà caratteristica di queste trasformazioni:

$$\omega(Pv,w) + \omega(v,Pw) = 0$$

Lo spazio vettoriale

$$\mathfrak{ps}(V) := \{P \in End(V) | \forall v,w \in V \quad \omega(Pv,w) + \omega(v,Pw) = 0\}$$

è un'algebra di Lie rispetto al commutatore $[P,Q] = PQ - QP$: infatti, se $P,Q \in \mathfrak{ps}(V)$,

$$\begin{aligned}\omega([P,Q]v,w) &= \omega(PQv,w) - \omega(QPv,w)\\ &= \omega(Pw,Qv) - \omega(Qw,Pv)\\ &= \omega(v,QPw) - \omega(QPw,v)\\ &= \omega([P,q]w,v)\end{aligned}$$

L'algebra di Lie $\mathfrak{ps}(V)$ si dice *algebra di Poisson* dello spazio V ed è, per definizione, l'algebra di Lie del gruppo di Poisson di V.

Osserviamo che se $P \in \mathfrak{ps}(V)$ è definita la forma quadratica $Q_P : V \longrightarrow \mathbb{K}$:

$$Q_P(v) := \frac{1}{2}\omega(Pv,v)$$

che si dice *hamiltoniana*. Ovviamente è non degenere se e solo se lo è ω. Dato che Q_P può vedersi come un elemento di $\mathrm{Sym}^2 V^*$, possiamo calcolarne le parentesi di Poisson, ottenendo

$$\{Q_P, Q'_P\}(v) = \pi(dQ_P, dQ'_P)(v) = [P,P'](v) = \omega(Pv, P'v)$$

Vediamo ora come si scrivono nelle coordinate standard le matrici dell'algebra di Poisson di V: naturalmente $P \in \mathfrak{ps}(V)$ se e solo se $P^T\omega + \omega P = 0$, cioè, scrivendo $P = \begin{pmatrix} X & & c\\ & & d\\ a & b & e\end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} X^T J & & 0\\ & & 0\\ c^T & d^T & 0\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} JX & & J\begin{pmatrix} c\\ d\end{pmatrix}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Quindi P deve essere della forma $\begin{pmatrix} X & & 0 \\ & & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix}$ con $X \in \mathfrak{ps}(S)$.

In termini intrinseci, scriviamo una formula per il commutatore in $\mathfrak{ps}(V)$, utilizzando la decomposizione $P = P_s + P_n + P_m$ (desunta da quella degli elementi di $Ps(V)$), con $P_s \in \mathfrak{sp}(S)$, $P_n \in \mathfrak{gl}(N)$ e $P_m \in \mathfrak{Hom}(S, N)$ (algebra di Lie abeliana). Allora

$$[P_S + P_n + P_m, P'_s + P'_n + P'_m] = [P_s, P'_s] + [P_n, P'_n] + ([P_n, P'_m] + [P_m, P'_n])$$

Quindi P sta nel centro dell'algebra $\mathfrak{ps}(V)$ se e solo se, per ogni P': $[P_s, P'_s] = 0$, $[P_n, P'_n] = 0$ e $[P_n, P'_m] + [P_m, P'_n] = 0$ il che, ovviamente equivale a $P_n \in Z(\mathfrak{gl}(N) = \{\text{matrici diagonali}\} \cong \mathbb{K}$.

Osserviamo inoltre che la sottoalgebra abeliana $\mathfrak{Hom}(S, N)$ è in realtà un ideale (perché il sottogruppo corrispondente è normale) e quindi il radicale di $\mathfrak{ps}(V)$ è $Rad(\mathfrak{ps}(V)) = \mathfrak{Hom}(S, N) \oplus \mathbb{K}$. La decomposizione di Levi di $\mathfrak{ps}(V)$ è quindi

$$\mathfrak{ps}(V) = Rad(\mathfrak{ps}(V)) \rtimes (\mathfrak{sp}(V) \oplus \mathfrak{sl}(N))$$

Da queste considerazioni segue che $\mathfrak{ps}(V)$ non è riduttiva (il suo centro non coincide col radicale), ma è estensione abeliana dell'algebra di Lie semisemplice $\mathfrak{sp}(V) \oplus \mathfrak{sl}(N)$.

Per concludere notiamo che

Proposizione 2.6.22 *Una varietà è una varietà di Poisson regolare se il gruppo strutturale del suo fibrato tangente si riduce al gruppo di Poisson.*

Il ragionamento è il medesimo che si effettua nel mostrare che una riduzione al gruppo ortogonale equivale alla scelta di una metrica riemanniana (cfr. [53, Vol.I, esempio 5.7]).

Capitolo 3

Moduli e rappresentazioni di Poisson

In questo capitolo, seguendo l'approccio astratto alla teoria di Poisson delineato in precedenza, introduciamo alcuni nuovi concetti, assai naturali dal punto di vista algebrico, principalmente per mezzo di esempi che poi avranno interesse geometrico: l'idea è di gettare le basi di una "teoria delle rappresentazioni per le algebre di Poisson, a diversi livelli di generalità; questo si traduce, ovviamente, in una teoria dei moduli che qui per la prima volta viene presentata[1]. Dopo aver introdotto le categorie di moduli che ci interessano proviamo a definire alcuni invarianti "topologici (in vista delle applicazioni geometriche) considerando le coomologie a coefficienti in questi moduli.

3.1 Esempi di moduli di Poisson

Il calcolo differenziale che abbiamo delineato fin qui poggia interamente sul prodotto associativo dell'algebra A: nel caso di algebre di Poisson naturalmente possiamo arricchire la teoria facendo intervenire la struttura di algebra di Lie. Il primo passo è combinare i concetti di modulo su un'algebra associativa e modulo su un'algebra di Lie, cioè considerare moduli E sull'algebra associativa $(A, \cdot)$ che siano anche rappresentazioni della $\mathbb{K}$-algebra di Lie $(A, \{\ \})$: l'esempio più elementare è il modulo A stesso rispetto alle azioni aggiunte (associativa e di Lie). Naturalmente queste due strutture, su A, sono legate dall'identità di Leibniz; in generale possiamo definire un tale legame per un qualsiasi modulo come segue:

Definizione 3.1.1 *Un* modulo di Poisson *è una coppia* (E, λ) *ove* E *è un* A*-modulo e* $\lambda : A \times E \longrightarrow E$ *una mappa* $\mathbb{K}$*-lineare tale che*

$$\lambda(\{a, b\}, e) = \lambda(a, \lambda(b, e)) - \lambda(b, \lambda(a, e))$$

$$\{a, b\} \cdot e = a \cdot \lambda(b, e) - \lambda(b, a \cdot e)$$

per $a, b \in A$ *ed* $e \in E$. *La* λ *si dice anche* struttura di Poisson *sul modulo* E.

Notiamo che le strutture di modulo associativa e di Lie non commutano se non sul centro $\operatorname{Cas} A$ dell'algebra di Poisson, dato che

$$a\lambda(b,e) = \lambda(a,be) + \{a,b\}e$$

Esempio. A è un modulo di Poisson rispetto alle azioni aggiunte in modo ovvio; anche il $\mathbb{K}$-spazio vettoriale duale A' rispetto alle azioni coaggiunte è un modulo di Poisson: l'identità di Leibniz si dimostra facilmente (abbiamo $\lambda(a,\varphi)(b) = \varphi\{a,b\}$)

$$\begin{aligned}(\{a,b\}\varphi)(c) &= \varphi(\{a,b\}c) = \varphi(\{a,bc\}) - \varphi(\{a,c\}b)\\ &= \lambda(a,\varphi)(bc) - (b\varphi)(\{a,c\})\\ &= (b\lambda(a,\varphi) - \lambda(a,b\varphi))\,(c)\end{aligned}$$

Questi esempi suggeriscono di usare una notazione più espressiva per l'azione λ in un modulo di Poisson, cioè di scrivere $\{a,e\} := \lambda(a,e)$; allora gli assiomi di modulo di Poisson divengono:

$$(ab)e = a(be) \tag{$M1$}$$

$$\{\{a,b\},e\} = \{a,\{b,e\}\} - \{b,\{a,e\}\} \tag{$M2$}$$

$$\{a,b\}e = \{a,be\} - b\{a,e\} \tag{$M3$}$$

Notiamo che esiste una asimmetria nella definizione di modulo di Poisson: infatti abbiamo scelto una identità di Leibniz fra due possibili; avremmo infatti anche potuto richiedere la seguente identità (che noi chiameremo *identità moltiplicativa*):

$$\{ab,e\} = a\{b,e\} + b\{a,e\} \tag{$M4$}$$

Nei casi $E = A$, ed $E = A'$ la (M4) è ovviamente verificata: nel caso A' si nota che

$$\begin{aligned}\{ab,\varphi\}(c) &= \varphi(\{ab,c\}) = \varphi(a\{b,c\}) + \varphi(b\{a,c\})\\ &= (a\varphi)\{b,c\} + (b\varphi)\{a,c\}\\ &= \{a,b\varphi\}(c) + \{b,a\varphi\}(c)\end{aligned}$$

Definizione 3.1.2 *Un* modulo moltiplicativo *è una coppia* (E,λ) *ove* E *è un* A*-modulo e* $\lambda : A\times E \longrightarrow E$ *una mappa* $\mathbb{K}$*-lineare tale che*

$$\lambda(\{a,b\},e) = \lambda(a,\lambda(b,e)) - \lambda(b,\lambda(a,e))$$

$$\lambda(ab,e) = a\cdot\lambda(b,e) + b\cdot\lambda(a,e)$$

per $a,b\in A$ *ed* $e\in E$*. La* λ *si dice anche* struttura moltiplicativa *sul modulo* E*.*

Mostriamo con degli esempi che l'identità di Leibniz e quella moltiplicativa sono indipendenti.

Esempio. Consideriamo lo spazio degli operatori lineari $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(A)$ su A come modulo su A rispetto alla ($a, b \in A$, $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(A)$):

$$(aT)(b) = a(Tb)$$

Possiamo anche definire

$$\{a, T\}(b) = \{a, Tb\}$$

Che si tratti di una azione di Lie segue dall'identità di Jacobi per la parentesi di Poisson su A:

$$\begin{aligned}\{\{a, b\}, T\}(c) &= \{\{a, b\}, Tc\} = \{a, \{b, Tc\}\} - \{b, \{a, Tc\}\} \\ &= (\{a, \{b, T\}\} - \{b, \{a, T\}\})(c)\end{aligned}$$

Rispetto a queste parentesi $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(A)$ diviene un modulo moltiplicativo sull'algebra di Poisson A:

$$\{ab, T\}(c) = \{ab, Tc\} = a\{b, T\}(c) + b\{a, T\}(c)$$

ed è anche un modulo di Poisson:

$$\begin{aligned}(\{a, b\}T)(c) &= \{a, b\}T(c) = \{a, bT(c)\} - b\{a, T(c)\} \\ &= (\{a, bT\} - b\{a, T\})(c)\end{aligned}$$

Questa struttura di Poisson moltiplicativa è quella aggiunta di A su $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(A)$: si noti che la struttura di Lie coaggiunta

$$\{a, T\}'(b) = T\{b, a\}$$

che possiamo, usando la notazione per i campi hamiltoniani, più sinteticamente scrivere

$$\{a, T\}' = -T \circ X_a$$

è una azione di Lie

$$\begin{aligned}\{\{a, b\}, T\}' &= -T \circ X_{\{a,b\}} = -T \circ [X_a, X_b] \\ &= -T \circ X_a \circ X_b + T \circ X_b \circ X_a \\ &= \{b, T \circ X_a\}' - \{a, T \circ X_b\}' \\ &= -\{b, \{a, T\}'\}' + \{a, \{b, T\}'\}'\end{aligned}$$

che tuttavia non definisce né una struttura moltiplicativa né una struttura di Poisson: infatti

$$\{ab, T\}' = -T \circ aX_b - T \circ bX_a$$

(T è semplicemente un operatore $\mathbb{K}$-lineare) e

$$\{a, bT\}' = -bT \circ X_a = b\{a, T\}'$$

Se tuttavia consideriamo questa struttura di Lie e la struttura di modulo associativo coaggiunta:

$$(a \cdot' T)(b) = T(ab)$$

otteniamo un modulo di Poisson moltiplicativo: dato che

$$\begin{aligned}\{ab, T\}' &= -T \circ (aX_b) - T \circ (bX_c) \\ &= -(a \cdot' T) \circ X_b - (b \cdot' T) \circ X_a \\ &= \{b, a \cdot' T\}' + \{a, b \cdot' T\}'\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(\{a, b\} \cdot' T)(c) &= T(\{a, b\}c) = T(\{a, bc\}) - T(\{a, c\}b) \\ &= -b \cdot' \{a, T\}'(c) + \{a, b \cdot' T\}'(c)\end{aligned}$$

Invece considerando la struttura associativa coaggiunta e quella di Lie aggiunta non si ottiene né un modulo moltiplicativo né un modulo di Poisson.

Notiamo che esiste una terza azione di Lie che è naturale considerare su $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(A)$, e che è semplicemente la differenza fra le precedenti:

$$\{a, T\}'' = \{a, T\} - \{a, T\}' = [X_a, T]$$

In effetti

$$\begin{aligned}\{\{a, b\}, T\}'' &= [X_{\{a,b\}}, T] = [[X_a, X_b], T] \\ &= [X_a, [X_b, T]] - [X_b, [X_a, T]] \\ &= \{a, \{b, T\}''\}'' - \{b, \{a, T\}''\}''\end{aligned}$$

Inoltre

$$\{a, bT\}'' = [X_a, bT] = b[X_a, T] + \{a, b\}T = b\{a, T\}'' + \{a, b\}T$$

dunque la $\{\,\}''$ è una struttura di Poisson su $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(A)$: tuttavia

$$\begin{aligned}\{ab, T\}'' &= [X_{ab}, T] = [aX_b, T] + [bX_a, T] \\ &= a\{b, T\}'' - T(a)X_b + b\{a, T\}'' - T(b)X_a\end{aligned}$$

e quindi non si tratta di una struttura moltiplicativa.

Dunque un modulo di Poisson non è necessariamente moltiplicativo; in generale il legame fra l'identità di Leibniz e quella moltiplicativa è espresso dal

Lemma 3.1.3 *Se A è un'algebra di Poisson ed E è un A-modulo di Poisson allora*

$$\{a, be\} + \{b, ae\} = a\{b, e\} + b\{a, e\}$$

per $a, b \in A$ ed $e \in E$.

Dimostrazione: Basta notare che

$$\{a, be\} + \{b, ae\} = b\{a, e\} + \{a, b\}e + a\{b, e\} + \{b, a\}e = a\{b, e\} + b\{a, e\}$$

QED

Esempio. Consideriamo il modulo $\operatorname{Der} A$ delle derivazioni della struttura associativa di A: si tratta di un sottomodulo di $\operatorname{End}_{\mathbb{K}}(A)$, ma delle tre azioni di Lie che abbiamo definito su $\operatorname{End}_{\mathbb{K}}(A)$ solo la $\{\,\}''$ porta derivazioni in derivazioni (essendo definita da un commutatore con un campo hamiltoniano che è una derivazione di A): scriviamo semplicemente

$$\{a, X\} = [X_a, X]$$

In questo modo $\operatorname{Der} A$ diviene un modulo di Poisson *non moltiplicativo.*

Esempio. Delle tre strutture di Lie che abbiamo considerato su $\operatorname{End}_{\mathbb{K}}(A)$ solo la terza si restringe al sottomodulo $\mathcal{H}_A \subset \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(A)$ generato dall'algebra di Lie dei campi hamiltoniani: infatti

$$[X_a, \sum_i b_i X_{h_i}] = \sum_i (b_i[X_a, X_{h_i}] + \{a, b_i\}X_{h_i}) = \sum_i \big(b_i X_{\{a,h_i\}} + \{a, b_i\}X_{h_i}\big)$$

Quindi abbiamo ancora un modulo di Poisson non moltiplicativo; lo stesso possiamo dire del modulo $\mathcal{C}_A$ generato dalle derivazioni canoniche: in effetti $\mathcal{H}_A$ è un ideale di Lie in questo modulo

$$[X_a, \sum_i b_i X_i] = \sum_i (b_i[X_a, X_i] + \{a, b_i\}X_i) = \sum_i \big(-b_i X_{X_i(a)} + \{a, b_i\}X_i\big)$$

(le X_i sono derivazioni canoniche, cioè $[X_a, X_i] = X_a X_i - X_i X_a = -X_{X_i a}$).

Esempio. Consideriamo due moduli E e F su A, e lo spazio $\hom_{\mathbb{K}}(E, F)$ degli operatori $\mathbb{K}$-lineari da E a F: si tratta di un A-modulo rispetto all'azione aggiunta $aA(e) = a(Ae)$; si noti che esiste anche un'altra struttura naturale di A-modulo su $\hom_{\mathbb{K}}(E, F)$, precisamente quella coaggiunta: $aA(e) = A(ae)$, e che queste due strutture rendono $\hom_{\mathbb{K}}(E, F)$ un bimodulo. Ora consideriamo il sottospazio $\hom_A(E, F)$ dei morfismi di A-moduli: $A \in \hom_A(E, F)$ se e solo se

$$A(ae) = aA(e)$$

($a \in A$ ed $e \in E$). Si tratta cioè del sottospazio sul quale le due azioni coincidono.

Se F è un modulo di Lie possiamo considerare la struttura

$$\{a, A\}_E(e) = \{a, Ae\}$$

che rende $\hom_{\mathbb{K}}(E, F)$ un modulo di Lie; se F è di Poisson (risp. moltiplicativo) rispetto all'azione associativa aggiunta allora anche $\hom_{\mathbb{K}}(E, F)$ diviene di Poisson (risp. moltiplicativo). Se E è un modulo di Lie possiamo considerare l'azione di Lie su $\hom_{\mathbb{K}}(E, F)$ data da

$$\{a, A\}_F(e) = A\{a, e\}$$

Se E è di Poisson (risp. moltiplicativo) rispetto all'azione associativa coaggiunta allora anche $\hom_{\mathbb{K}}(E, F)$ diviene di Poisson (risp. moltiplicativo).

Nel caso del modulo $\hom_A(E, F)$ abbiamo quindi due strutture di Lie, come pure la loro differenza

$$\{a, A\} = \{a, A\}_E - \{a, A\}_F$$

Quest'ultima rende $\hom_A(E, F)$ un modulo di Poisson se F lo è:

$$\begin{aligned}\{a, bA\}(e) &= \{a, bAe\} - bA\{a, e\} \\ &= b\{a, Ae\} - bA\{a, e\} + \{a, b\}Ae \\ &= b\{a, A\}(e) + \{a, b\}A(e)\end{aligned}$$

e un modulo moltiplicativo se lo sono sia E che F

$$\begin{aligned}\{ab, A\}(e) &= \{ab, Ae\} - A\{ab, e\} \\ &= a\{b, Ae\} + b\{a, Ae\} - aA\{b, e\} - bA\{a, e\} \\ &= a\{b, A\}(e) + b\{a, A\}(e)\end{aligned}$$

Esempio. Il modulo dei differenziali di Kähler è pure un modulo di Poisson rispetto all'azione

$$\{a, \omega\} = \mathcal{L}_{X_a}\omega$$

Di nuovo si tratta di semplici calcoli:

$$\begin{aligned}\{\{a,b\},\omega\} &= \mathcal{L}_{[X_a,X_b]}\omega = [\mathcal{L}_{X_a},\mathcal{L}_{X_b}]\omega \\ &= \mathcal{L}_{X_a}(\{b,\omega\}) - \mathcal{L}_{X_b}(\{a,\omega\}) \\ &= \{a,\{b,\omega\}\} - \{b,\{a,\omega\}\}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}a\{b,\omega\} - \{b,a\omega\} &= a\mathcal{L}_{X_b}\omega - \mathcal{L}_{X_b}a\omega \\ &= a\mathcal{L}_{X_b}\omega - \{b,a\}\omega - a\mathcal{L}_{X_b}\omega \\ &= \{a,b\}\omega\end{aligned}$$

Osserviamo che questa struttura è compatibile con la struttura di Lie presente su Ω_A; infatti, se $\pi : \Omega_A \wedge \Omega_A \longrightarrow A$ è il tensore di Poisson di A, la struttura di Lie su Ω_A è definita come

$$\{\omega_1,\omega_2\} = \mathcal{L}_{\pi\#_{\omega_1}}\omega_2 - \mathcal{L}_{\pi\#_{\omega_2}}\omega_1 - d\pi(\omega_1,\omega_2)$$

e quindi

$$\begin{aligned}\{da,\omega\} &= \mathcal{L}_{X_a}\omega - \mathcal{L}_{\pi\#_\omega}da - d\pi(da,\omega) \\ &= \mathcal{L}_{X_a}\omega - d\pi(\omega,da) - d\pi(da,\omega) \\ &= \mathcal{L}_{X_a}\omega = \{a,\omega\}\end{aligned}$$

Infine notiamo che questa non è una struttura moltiplicativa

$$\{ab,\omega\} = \mathcal{L}_{X_{ab}}\omega = a\mathcal{L}_{X_b}\omega + b\mathcal{L}_{X_a}\omega + \omega(X_a)db + \omega(X_b)da$$

Un esempio di modulo di Poisson secondo la nostra terminologia, sono le algebre di Poisson filtrate piatte considerate da Reshetikin, Voronov e Weinstein nel loro studio algebrico della quantizzazione *à la* Fedosov delle varietà simplettiche e della coomologia quantistica delle varietà proiettive [86] (il loro uso del termine *Poisson module* è diverso dal nostro).

Diamo infine un esempio di modulo moltiplicativo non di Poisson: consideriamo una varietà di Lie–Poisson $\mathfrak{g}^*$; poiché, come spazio topologico, è contraibile, ogni fibrato vettoriale su di essa è (isomorfo al fibrato) banale ([97, §11]), cioè della forma $\mathfrak{g}^* \times V \longrightarrow \mathfrak{g}^*$, e lo spazio delle sezioni è dunque lo spazio $C^\infty(\mathfrak{g}^*, V)$ delle funzioni differenziabili $s : \mathfrak{g}^* \longrightarrow V$. In altre parole i moduli proiettivi su $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ sono tutti della forma $C^\infty(\mathfrak{g}^*, V)$, e sono quelli che qui ci interessano.

Supponiamo ad esempio che V sia una rappresentazione dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$: esiste cioè un morfismo di algebre di Lie

$$\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}(V)$$

Ora definiamo, se $f \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ e $s \in C^\infty(\mathfrak{g}^*, V)$, una nuova funzione $\{f, s\} \in C^\infty(\mathfrak{g}^*, V)$ come:

$$\{f, s\}(\varphi) = \rho(df_\varphi)(s(\varphi))$$

($df_\varphi \in T^*_\varphi\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}^{**} = \mathfrak{g}$). Abbiamo così una mappa $\{\,\}$ $\mathbb{R}$-bilineare, tale che (per definizione delle parentesi di Lie–Poisson)

$$\begin{aligned}
\{\{f, g\}, s\}(\varphi) &= \rho(d\{f, g\}_\varphi)(s(\varphi)) \\
&= \rho([df_\varphi, dg_\varphi])(s(\varphi)) = [\rho(df_\varphi), \rho(dg_\varphi)]s(\varphi) \\
&= \rho(df_\varphi)(\rho(dg_\varphi)(s(\varphi))) - \rho(dg_\varphi)(\rho(df_\varphi)(s(\varphi))) \\
&= \rho(df_\varphi)(\{g, s\}(\varphi)) - \rho(dg_\varphi)(\{f, s\}(\varphi)) \\
&= \{f, \{g, s\}\}(\varphi) - \{g, \{f, s\}\}(\varphi)
\end{aligned}$$

Dunque si tratta di un'azione dell'algebra di Lie $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ su $C^\infty(\mathfrak{g}^*, V)$; inoltre

$$\{f, gs\}(\varphi) = \rho(df_\varphi)(g(\varphi)s(\varphi)) = g(\varphi)\rho(df_\varphi)(s(\varphi)) = g(\varphi)\{f, s\}(\varphi)$$

Quindi non si tratta di una struttura di modulo di Poisson; tuttavia è moltiplicativa, dato che

$$\{fg, s\}(\varphi) = \rho(f(\varphi)dg_\varphi + g(\varphi)df_\varphi)(s(\varphi)) = f(\varphi)\{g, s\}(\varphi) + g(\varphi)\{f, s\}(\varphi)$$

3.2 La categoria dei moduli di Poisson

I moduli di Poisson formano ovviamente una categoria, che, nel caso delle algebre di Lie, deve ridursi alla categoria delle rappresentazioni:

Definizione 3.2.1 *Un morfismo $f : E \longrightarrow F$ fra moduli di Poisson è un* morfismo di Poisson *se*

$$f\{a, e\} = \{a, f(e)\}$$

per ogni $a \in A$, $e \in E$.

Notiamo che $f(ae) = af(e)$, quindi

$$f\{a, be\} = \{a, bf(e)\} = b\{a, f(e)\} + \{a, b\}f(e) = bf(\{a, e\}) + \{a, b\}f(e)$$

Lo spazio dei morfismi di Poisson è un A-sottomodulo di $\hom_A(E, F)$, quindi è di Poisson se lo è F ed è moltiplicativo se lo sono E e F.

Ad esempio se $E = A$ e $F = \operatorname{Der} A$ un morfismo di moduli di Poisson è dato dal passaggio ai campi hamiltoniani $X : A \longrightarrow \operatorname{Der} A$; infatti

$$X_{\{a,b\}} = [X_a, X_b] = \{a, X_b\}$$

(rispetto alla struttura di Poisson su $\operatorname{Der} A$).

Se $E = F = A$ allora un morfismo di Poisson è un morfismo $f \in \operatorname{End}_A(A)$ di A-moduli tale che[2]

$$f\{a, b\} = \{a, f(b)\} = \{a, bf(1)\} = \{a, b\}f(1) + \{a, f(1)\}b$$

Ma $f(1) = 1$ perché si tratta di un morfismo di algebre associative, e $\{a, 1\} = 0$, dunque f è l'identità sull'algebra di Lie derivata dell'algebra di Poisson, cioè è l'identità sugli elementi della forma $\{a, b\}$. Ad esempio se le parentesi di Poisson sono non degeneri allora $A/\{A, A\} = A/\operatorname{Ham} A = \mathbb{K}$ e quindi f può unicamente essere l'identità.

Notiamo che in questo caso un concetto più rilevante è quello di morfismo di algebre di Poisson: $f\{a, b\} = \{fa, fb\}$.

La categoria dei moduli di Poisson possiede i prodotti tensoriali: se E e F sono A-moduli di Poisson anche $E \otimes_A F$ possiede una struttura naturale di modulo di Poisson, definita come

$$\{a, e \otimes f\} = \{a, e\} \otimes f + e \otimes \{a, f\}$$

Questo rende ovviamente $E \otimes_A F$ una rappresentazione dell'algebra di Lie A, e inoltre

$$\begin{aligned}\{a, be \otimes f\} &= \{a, be\} \otimes f + be \otimes \{a, f\}\\ &= b\{a, e\} \otimes f + \{a, b\}e \otimes f + be \otimes \{a, f\}\\ &= b\{a, e \otimes f\} + \{a, b\}e \otimes f\end{aligned}$$

(si noti che basta che uno dei due moduli sia di Poisson perché il prodotto tensoriale lo sia). Se E e F sono ambedue moltiplicativi, anche $E \otimes_A F$ lo è:

$$\begin{aligned}\{ab, e \otimes f\} &= \{ab, e\} \otimes f + e \otimes \{ab, f\}\\ &= a\{b, e\} \otimes f + b\{a, e\} \otimes f + e \otimes a\{b, f\} + e \otimes b\{a, e\}\\ &= a\{b, e \otimes f\} + b\{a, e \otimes f\}\end{aligned}$$

Un'altra costruzione interessante che coinvolge i moduli di Poisson è l'estensione: se A è un'algebra di Poisson ed E un modulo di Poisson su A

[2]Le nostre algebre sono sempre commutative e dotate di unità: quest'ultima non è una restrizione eccessiva perché, a meno di sommare con l'algebra $\mathbb{K}$, possiamo sempre assumere che esista una unità 1 per un'algebra associativa.

allora possiamo definire sullo spazio vettoriale $A \oplus E$ la mappa bilineare antisimmetrica

$$\{a \oplus e, a' \oplus e'\}^{\oplus} = \{a, a'\} \oplus (\{a, e'\} - \{a', e\})$$

(le parentesi di Poisson nel secondo addendo sono quelle della struttura di modulo); possiamo anche considerare la mappa bilineare

$$(a \oplus e) \cdot (a' \oplus e') = (aa') \oplus (ae' + a'e)$$

Proposizione 3.2.2 $(A \oplus E, \cdot, \{\,\}^{\oplus})$ *è un'algebra di Poisson commutativa.*

DIMOSTRAZIONE: La $\cdot$ è un prodotto associativo: infatti (si rammenti che le nostre algebre sono commutative)

$$\begin{aligned}((a \oplus e) \cdot (a' \oplus e')) \cdot (a'' \oplus e'') &= (aa' \oplus (ae' + a'e)) \cdot (a'' \oplus e'') \\ &= ((aa')a'') \oplus ((aa')e'' + a''(ae' + a'e)) \\ &= (a(a'a'')) \oplus ((aa')e'' + (aa'')e' + (a'a'')e) \\ &= (a(a'a'')) \oplus (a(a'e'' + a''e') + (a'a'')e) \\ &= (a \oplus e) \cdot (a'a'' \oplus (a'e'' + a''e')) \\ &= (a \oplus e) \cdot ((a' \oplus e') \cdot (a'' \oplus e''))\end{aligned}$$

Per assicurarci che $\{\,\}^{\oplus}$ renda $A \oplus E$ un'algebra di Lie basta verificare l'identità di Jacobi: intanto notiamo che

$$\begin{aligned}\{\{a \oplus e, a' \oplus e'\}^{\oplus}, a'' \oplus e''\}^{\oplus} &= \{\{a, a'\} \oplus (\{a, e'\} - \{a', e\}), a'' \oplus e''\}^{\oplus} \\ &= \{\{a, a'\}, a''\} \oplus (\{\{a, a'\}, e''\} - \{a'', \{a, e'\} - \{a', e\}\})\end{aligned}$$

Sommando le tre espressioni ottenute da questa permutando ciclicamente le variabile con apici, abbiamo:

$$\begin{aligned}(\{\{a, a'\}, a''\} + &\{\{a', a''\}, a\} + \{\{a'', a\}, a'\}) \oplus \\ &\big(\{\{a, a'\}, e''\} - \{a'', \{a, e'\} - \{a', e\}\} \\ &+ \{\{a', a''\}, e\} - \{a, \{a', e''\} - \{a'', e'\}\} \\ &+ \{\{a'', a\}, e'\} - \{a', \{a'', e\} - \{a, e''\}\}\big)\end{aligned}$$

Il primo addendo diretto è zero per l'identità di Jacobi in A, mentre il secondo è zero perché, ad esempio

$$\{\{a, a'\}, e''\} - \{a, \{a', e''\}\} + \{a', \{a, e''\}\} = 0$$

essendo E un modulo di Lie su A.

Resta da verificare l'identità di Leibniz:

$$\begin{aligned}
\{(a\oplus e)\cdot(a'\oplus e'),a''\oplus e''\}^{\oplus} &= \{aa'\oplus(ae'+a'e),a''\oplus e''\}^{\oplus}\\
&= \{aa',a''\}\oplus(\{aa',e''\}-\{a'',ae'+a'e\})\\
&= \{aa',a''\}\oplus(a\{a',e''\}+a'\{a,e''\}\\
&\quad -\{a'',a\}e'-a\{a'',e'\}-\{a'',a'\}e-a'\{a'',e\})\\
&= (a\{a',a''\})\oplus(a(\{a',e''\}-\{a'',e'\})+\{a',a''\}e)\\
&\quad +(a'\{a,a''\})\oplus(a'(\{a,e''\}-\{a'',e\})+\{a,a''\}e')\\
&= (a\oplus e)(\{a',a''\}\oplus(\{a',e''\}-\{a'',e'\})\\
&\quad +(a'\oplus e')(\{a,a''\}\oplus(\{a,e''\}-\{a'',e\})\\
&= (a\oplus e)\{a'\oplus e',a''\oplus e''\}^{\oplus}+(a'\oplus e')\{a\oplus e,a''\oplus e''\}^{\oplus}
\end{aligned}$$

Si noti che abbiamo usato sia l'identità di Leibniz per il modulo di Poisson E che quella moltiplicativa.

QED

Notiamo che sia A che E sono sottoalgebre di Poisson di $A\oplus E$, che la struttura di Poisson su $A\oplus E$ ristretta ad A coincide con quella originaria di A e che inoltre

$$\{E,E\}^{\oplus}=0 \qquad \text{e} \qquad E\cdot E=0$$

Teorema 3.2.3 *Una struttura di algebra di Poisson commutativa su $A\oplus E$ che estenda quella di A e che si restringa a zero su E induce una struttura di modulo di Poisson moltiplicativo su E.*

DIMOSTRAZIONE: Basterà definire

$$\{a,e\}=\{a\oplus 0,0\oplus e\}^{\oplus}$$

Gli assiomi di modulo di Poisson moltiplicativo si ottengono immediatamente dagli assiomi di algebra di Poisson per $A\oplus E$.

QED

Se E è un modulo di moltiplicativo possiamo considerare lo spazio delle derivazioni dell'algebra associativa A nel modulo E

$$\mathrm{Der}(A,E)=\{X\in\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(A,E)\,|\,X(ab)=aX(b)+bX(a)\}$$

e lo spazio delle derivazioni dell'algebra di Lie A nella sua rappresentazione E:

$$\mathrm{Der}_L(A,E)=\{X\in\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(A,E)\,|\,X(\{a,b\})=\{a,X(b)\}-\{b,X(a)\}\}$$

Qui ci interessa la loro intersezione

$$\mathrm{Can}(A, E) = \mathrm{Der}(A, E) \cap \mathrm{Der}_L(A, E)$$

i cui elementi sono gli *operatori canonici a valori in* E. Nel caso $A = E$ con l'azione aggiunta otteniamo ovviamente gli operatori canonici della struttura di Poisson dell'algebra. Ad esempio, fissato $e \in E$, l'operatore

$$X_e(a) = \{a, e\}$$

è canonico: infatti

$$X_e(ab) = \{ab, e\} = a\{b, e\} + b\{a, e\} = aX_e(b) + bX_e(a)$$

dunque $X_e \in \mathrm{Der}(A, E)$ e

$$X_e\{a, b\} = \{\{a, b\}, e\} = \{a, \{b, e\}\} - \{b, \{a, e\}\} = \{a, X_e b\} - \{b, X_e a\}$$

Un operatore canonico della forma X_e si dice *operatore hamiltoniano* nel modulo E, e lo spazio da essi formato si denota con $\mathrm{Ham}(A, E)$.

Notiamo che

Proposizione 3.2.4 *Un modulo E su un'algebra di Poisson è moltiplicativo se e solo se esiste un operatore $\mathbb{K}$-lineare $X : E \longrightarrow \mathrm{Der}(A, E)$ tale che*

$$X_e\{a, b\} = X_{X_e a} b + X_{X_e b} a$$

Un modulo di Lie E su un'algebra di Poisson è di Poisson se e solo se esiste un operatore $\mathbb{K}$-lineare $X : E \longrightarrow \mathrm{Der}_L(A, E)$ tale che

$$X_{ae} = aX_e + eX_a$$

Rammentiamo ora che i differenziali di Kähler Ω_A godono della proprietà universale

$$\hom_A(\Omega_A, E) = \mathrm{Der}(A, E)$$

per ogni A-modulo E (cfr. [68, §1.3]); dunque la nostra mappa X può interpretarsi come una mappa $\mathbb{K}$-lineare

$$\tilde{X} : E \longrightarrow \hom_A(\Omega_A, E)$$

nel senso seguente

$$(\tilde{X}e)(da) = X_e a$$

Se il modulo è moltiplicativo, abbiamo che

$$\begin{aligned}\tilde{X}_{d\{a,b\}}e &= X_e\{a,b\} = X_{X_e a}b + X_{X_e b}a\\ &= \tilde{X}_{db}X_a e + \tilde{X}_{da}X_b e\\ &= \tilde{X}_{db}\tilde{X}_{da}e + \tilde{X}_{da}\tilde{X}_{db}e\end{aligned}$$

L'identità di Leibniz

$$\tilde{X}_{db}ae = X_{ae}b = a\tilde{X}_{db}e + \{a,b\}e$$

ricorda quella che definisce le connessioni: in effetti la $\tilde{X}$ è una specie di "connessione rispetto al funtore hom; una connessione è infatti una mappa del tipo $E \longrightarrow \Omega_A \otimes E$, mentre qui abbiamo $E \longrightarrow \hom(\Omega_A, E)$. Vedremo in séguito un legame fra moduli di Poisson e connessioni nel senso usuale del termine (cioè secondo la teoria esposta nel §II-3).

Se A è un'algebra di Poisson ed E un modulo di Poisson su di essa, possiamo considerare gli spazi vettoriali $C_n(E) = E \otimes_{\mathbb{K}} A^{\wedge n}$, che costituiscono un complesso di catene rispetto agli operatori di bordo $\flat : C_n(E) \longrightarrow C_{n-1}(E)$ seguenti:

$$\begin{aligned}\flat(e \otimes a_1 \wedge ... \wedge a_n) = &\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\{a_i, e\} \otimes a_1 \wedge ... \wedge \widehat{a_i} \wedge ... \wedge a_n\\ &+ \sum_{i<j}^{1...n}(-1)^{i+j-1}e \otimes \{a_i, a_j\} \wedge a_1 \wedge ... \wedge \widehat{a_i} \wedge ... \wedge \widehat{a_i} \wedge ... \wedge a_n\end{aligned}$$

Otteniamo in questo modo una omologia che è l'omologia di Chevalley–Eilenberg dell'algebra di Lie A rispetto alle parentesi di Poisson a coefficienti nel modulo E. In modo analogo abbiamo la coomoologia, che è calcolata dal complesso di spazi $C^n(E) = \hom_{\mathbb{K}}(A^{\wedge n}, E)$ rispetto agli operatori di cobordo

$$\begin{aligned}\delta P(a_0 \wedge ... \wedge a_n) = &\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\{a_i, P(a_0 \wedge ... \wedge \widehat{a_i} \wedge ... \wedge a_n)\} +\\ &+ \sum_{i<j}^{0...n}(-1)^{i+j}P(\{a_i, a_j\}, a_0 \wedge ... \wedge \widehat{a_i} \wedge ... \wedge \widehat{a_j} \wedge ... \wedge a_n)\end{aligned}$$

Esempio. Il primo gruppo di coomologia $H^1(A,E)$ di questo complesso è esattamente il quoziente $\mathrm{Can}(A,E)/\mathrm{Ham}(A,E)$ dei moduli definiti alla fine del paragrafo precedente: infatti un 1-cociclo è una mappa $P : A \longrightarrow E$ tale che

$$0 = \delta P(a \wedge b) = \{a, P(b)\} - \{b, P(a)\} - P\{a,b\}$$

mentre un 1-cobordo è una mappa $P : A \longrightarrow E$ della forma

$$P(a) = \delta b(a) = \{b, a\}$$

per qualche $b \in A$, cioè un elemento di $\mathrm{Ham}(A, E)$.

3.3 Coomologia a coefficienti in una rappresentazione

La coomologia a coefficienti in un modulo di Poisson da noi appena considerata non dà come caso particolare la coomologia di Poisson da noi definita considerando il calcolo differenziale. Piuttosto quest'ultima è una coomologia dell'algebra di Lie Ω_A: consideriamo infatti il modulo di Poisson Ω_A su un'algebra di Poisson A e notiamo che lo spazio A è una rappresentazione dell'algebra di Lie Ω_A, rispetto all'azione data dalla mappa di Poisson

$$\pi^{\#} : \Omega_A \longrightarrow \mathrm{Der}\, A$$

Possiamo allora considerare lo spazio delle catene di Chevalley–Eilenberg (cfr. [19, §XIII-7], [41, §1.3], [68, §10]) dell'algebra di Lie Ω_A a coefficienti nel modulo A

$$C_n(\Omega_A, A) = A \otimes \Omega_A^{\wedge n}$$

e la mappa di bordo

$$\begin{aligned} \flat(a \otimes \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_n) = & \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \pi^{\#}\omega_i(a) \otimes \omega_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\omega_i} \wedge \ldots \wedge \omega_n \\ & + \sum_{i<j}^{1\ldots n} (-1)^{i+j-1} a \otimes \{\omega_i, \omega_j\} \wedge \omega_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\omega_i} \wedge \ldots \wedge \widehat{\omega_i} \wedge \ldots \wedge \omega_n \end{aligned}$$

L'omologia calcolata da questo complesso è esattamente l'omologia dell'algebra di Lie Ω_A a coefficienti nella rappresentazione A che può definirsi nel modo usuale con i funtori derivati del prodotto tensoriale (cfr. [19, §XIII-8]): osserviamo che si tratta esattamente dell'omologia di Poisson che abbiamo definito nel §II-4: infatti basta comporre la mappa di bordo con la struttura di A-modulo associativo $A \otimes \Omega_A \longrightarrow \Omega_A$ per ottenere la mappa Δ di Koszul.

In modo del tutto analogo possiamo constatare che la coomologia di Poisson è la coomologia dell'algebra di Lie Ω_A a coefficienti nella rappresentazione A; questa è infatti calcolata dal complesso

$$C^n(\Omega_A, A) = \hom_{\mathbb{K}}(\Omega_A^{\wedge n}, A)$$

rispetto alla mappa di cobordo

$$\begin{aligned}\delta P(\omega_0\wedge\ldots\wedge\omega_n)=&\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\pi^{\#}\omega_i P(\omega_0\wedge\ldots\wedge\widehat{\omega_i}\wedge\ldots\wedge\omega_n)+\\&+\sum_{i<j}^{0\ldots n}(-1)^{i+j}P(\{\omega_i,\omega_j\},\omega_0\wedge\ldots\wedge\widehat{\omega_i}\wedge\ldots\wedge\widehat{\omega_j}\wedge\ldots\wedge\omega_n)\end{aligned}$$

Abbiamo dunque una interpretazione puramente algebrica per l'omologia e la coomologia di Poisson che mostra come queste sono essenzialmente omologie di Chevalley–Eilenberg, così come la coomologia di de Rham di A è la coomologia dell'algebra di Lie $\operatorname{Der} A$ a coefficienti nella rappresentazione A (cfr. [41, §2.4]).

Si noti che, se $H^A_\bullet(A)$ e $H_A^\bullet(A)$ denotano l'omologia e la coomologia dell'algebra di Lie A (definita al principio di questo §) a coefficienti nel modulo aggiunto, abbiamo due mappe

$$d_*: H^A_\bullet(A)\longrightarrow H^\pi_\bullet(A)\qquad\text{e}\qquad d^*: H_\pi^\bullet(A)\longrightarrow H_A^\bullet(A)$$

Infatti il morfismo di algebre di Lie $d: A\longrightarrow\Omega_A$, o meglio la sua estensione

$$d\,(a_1\wedge\ldots\wedge a_n)=da_1\wedge\ldots\wedge da_n$$

induce due mappe $d_*: C_n(A)\longrightarrow C_n(\Omega_A,A)$ e $d^*: C^n(\Omega_A,A)\longrightarrow C^n(A)$ come

$$\begin{aligned}d_*(a\otimes a_1\wedge\ldots\wedge a_n)&=a\otimes da_1\wedge\ldots\wedge da_n\\d^*P(a_1\wedge\ldots\wedge a_n)&=P(da_1\wedge\ldots\wedge da_n)\end{aligned}$$

Ora

$$\begin{aligned}\flat d_*(a\otimes a_1\wedge\ldots\wedge a_n)&=\flat(a\otimes da_1\wedge\ldots\wedge da_n)\\&=\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\{a_i,a\}\otimes da_1\wedge\ldots\wedge\widehat{da_i}\wedge\ldots\wedge da_n\\&\quad+\sum_{i<j}^{1\ldots n}a\otimes\{da_i,da_j\}\wedge da_1\wedge\ldots\wedge\widehat{da_i}\wedge\ldots\wedge\widehat{da_i}\wedge\ldots\wedge da_n\\&=\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\{a_i,a\}\otimes da_1\wedge\ldots\wedge\widehat{da_i}\wedge\ldots\wedge da_n\\&\quad+\sum_{i<j}^{1\ldots n}a\otimes d\{a_i,a_j\}\wedge da_1\wedge\ldots\wedge\widehat{da_i}\wedge\ldots\wedge\widehat{da_i}\wedge\ldots\wedge da_n\\&=d_*\flat(a\otimes a_1\wedge\ldots\wedge a_n)\end{aligned}$$

e, in modo analogo,

$$\delta d^* = d^* \delta$$

Questo vuol dire che d_* e d^* inducono mappe in omologia e coomologia.

Poiché siamo qui interessati alla coomologia di Poisson a coefficienti in un modulo, e poiché la generalizzazione giusta, come abbiamo visto, coinvolge l'algebra di Lie Ω_A piuttosto che A, siamo costretti, in vista delle applicazioni coomologiche, a modificare il concetto di modulo di Poisson (in qualche senso a linearizzarlo) secondo la seguente

Definizione 3.3.1 *Una* rappresentazione *di un'algebra di Poisson A è uno spazio vettoriale E su $\mathbb{K}$ tale che*

(1) *E sia un A-modulo;*

(2) *E sia una rappresentazione dell'algebra di Lie Ω_A;*

(3) *Valga la seguente identità di Leibniz*

$$[\omega, ae] = a[\omega, e] - i_{X_a}\omega e$$

ove $[\omega, e]$ è l'azione della forma ω sull'elemento $e \in E$.

Se E è una rappresentazione allora, ponendo

$$\{a, e\} = [da, e]$$

otteniamo una azione dell'algebra di Lie A su E:

$$\begin{aligned}\{\{a, b\}, e\} &= [d\{a, b\}, e] = [\{da, db\}, e] \\ &= [da, [db, e]] - [db, [da, e]] \\ &= \{a, \{b, e\}\} - \{b, \{a, e\}\}\end{aligned}$$

che rende E un modulo di Poisson:

$$\{a, be\} = [da, be] = b[da, e] - \{b, a\}e = b\{a, e\} + \{a, b\}e$$

Si noti inoltre che se una stessa struttura di modulo di Poisson $\{\,\}$ su E è indotta da due rappresentazioni $[\,]$ e $[\,]'$ di A allora

$$[da, e] = \{a, e\} = [da, e]'$$

cioè le rappresentazioni coincidono sui differenziali esatti; questo ovviamente non implica che debbano coincidere su tutto Ω_A (che è generato dai differenziali esatti come A-modulo e non come $\mathbb{K}$-spazio), a meno che non sia verificata la seguente condizione

Definizione 3.3.2 *Una* rappresentazione moltiplicativa *di un'algebra di Poisson è una rappresentazione tale che*

$$[a\omega, e] = a[\omega, e]$$

Se E è moltiplicativa, la struttura di modulo di Poisson che induce è pure moltiplicativa:

$$\{ab, e\} = [adb, e] + [bda, e] = a[db, e] + b[da, e] = a\{b, e\} + b\{a, e\}$$

e la rappresentazione determina una sola struttura di modulo.

Abbiamo quindi una mappa

$$\mathbf{d} : \{\text{Rappresentazioni}\} \longrightarrow \{\text{Moduli di Poisson}\}$$

che tuttavia non è suriettiva in generale. È infatti chiaro che una struttura di modulo di Poisson su E induce sui differenziali esatti una azione ben definita

$$[db, e] = \{b, e\}$$

che non è tuttavia possibile estendere in generale a tutto Ω_A per ottenere una rappresentazione: una definizione naturale sarebbe ovviamente

$$[adb, e] = a\{b, e\}$$

Questa posizione definisce una rappresentazione dell'algebra di Lie Ω_A: infatti riesce (si rammenti il teorema II-4.5)

$$\begin{aligned}
[\{adb, cde\}, m] &= [c\{adb, de\} + a\{b, c\}de, m] \\
&= [ac\{db, de\} - c\{e, a\}db + a\{b, c\}de, m] \\
&= ac\{\{b, e\}, m\} - c\{e, a\}\{b, m\} + a\{b, c\}\{e, m\} \\
&= ac\{b, \{e, m\}\} + a\{b, c\}\{e, m\} - ac\{e, \{b, m\}\} - c\{e, a\}\{b, m\} \\
&= a\{b, c\{e, m\}\} - c\{e, a\{b, m\}\} \\
&= [adb, [cde, m]] - [cde, [adb, m]]
\end{aligned}$$

Inoltre

$$[adb, ce] = a\{b, ce\} = ac\{b, e\} + a\{b, c\}e = c[adb, e] - (X_c adb)e$$

Si noti che una tale rappresentazione sarebbe moltiplicativa per definizione:

$$[adb, e] = a\{b, e\} = a[db, e]$$

Il problema è che, in generale, se Ω_A non è libero, potremmo avere

$$\omega = \sum_i a_i db_i = \sum_j c_j de_j$$

col che

$$\sum_i a_i\{b_i, e\} = [\omega, e] = \sum_j c_j\{e_i, e\}$$

mentre non è detto che il primo e il terzo membro coincidano. Cioè la rappresentazione indotta dalla struttura di Poisson non è ben definita in generale. Dato che, inoltre, è sempre moltiplicativa, può essere definita solo a partire da strutture di Poisson moltiplicative su E. Così della mappa

$$\mathbf{d} : \{\text{Rappresentazioni}\} \longrightarrow \{\text{Moduli di Poisson}\}$$

possiamo dire che:

Proposizione 3.3.3

(1) $\mathbf{d}$ *induce per restrizione una mappa iniettiva*

$$\left\{\begin{matrix}\text{Rappresentazioni}\\ \text{moltiplicative}\end{matrix}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{Moduli di Poisson}\\ \text{moltiplicativi}\end{matrix}\right\}$$

(2) *Se* Ω_A *è libero allora* $\mathbf{d}$ *è biunivoca.*

Se E è una rappresentazione dell'algebra di Poisson A possiamo definire la *coomologia* $H_\pi^\bullet(A, E)$ e l'*omologia* $H_\bullet^\pi(A, E)$ di A a coefficienti in E come la coomologia e l'omologia dell'algebra di Lie Ω_A a coefficienti nella rappresentazione E. Ovviamente nel caso $E = A$ rispetto alla rappresentazione aggiunta

$$[\omega, a] = \pi^\#\omega(a)$$

otteniamo le omologie di Poisson già discusse, che continuiamo a denotare semplicemente con $H_\pi^\bullet(A)$ e $H_\bullet^\pi(A)$. Si noti che la coomologia a coefficienti nella rappresentazione banale $\mathbb{K}$ ha come complesso semplicemente $(\Omega_A^{\wedge n})'$ e come differenziale

$$dP(\omega_0 \wedge ... \wedge \omega_n) = \sum_{i<j}^{0...n} (-1)^{i+j+1} P(\{\omega_i, \omega_j\} \wedge \omega_1 \wedge ... \wedge \widehat{\omega_i} \wedge ... \wedge \widehat{\omega_j} \wedge ... \wedge \omega_n)$$

Le rappresentazioni di un'algebra di Poisson formano ovviamente una categoria, i cui i morfismi sono gli operatori lineari

$$f : E \longrightarrow F$$

fra gli spazi delle rappresentazioni che siano mappe di A-moduli e morfismi di rappresentazioni dell'algebre di Lie Ω_A:

$$f(ae) = af(e) \qquad \text{e} \qquad f[\omega, e] = [\omega, f(e)]$$

Con questa definizione la mappa **d** precedente diviene un funtore covariante: infatti se $f : E \longrightarrow F$ è un morfismo di rappresentazioni, induce un morfismo di moduli dato che

$$f\{a, e\} = f[da, e] = [da, f(e)] = \{a, f(e)\}$$

Le proprietà funtoriali dell'omologia e della coomologia qui introdotte sono quelle usuali: se $f : A \longrightarrow B$ è un morfismo di algebre di Poisson allora induce un morfismo

$$\Omega f : \Omega_A \longrightarrow \Omega_B$$

come

$$\Omega f(adb) = f(a)df(b)$$

in modo che

$$\begin{aligned}
\Omega f\{adb, cde\} &= \Omega f(acd\{b, e\} + a\{b, c\}de - c\{e, a\}db) \\
&= f(ac)df\{b, e\} + f(a\{b, c\})df(e) - f(c\{e, a\})df(b) \\
&= f(a)f(c)\{df(b), df(e)\} + f(a)\{f(b), f(c)\}df(e) \\
&\qquad - f(c)\{f(e), f(a)\}df(b) \\
&= f(c)\{f(a)df(b), df(e)\} + f(a)\{f(b), f(c)\}df(e) \\
&= \{f(a)df(b), f(c)df(e)\} \\
&= \{\Omega f(adb), \Omega f(cde)\}
\end{aligned}$$

Se dunque E è una rappresentazione di B allora il morfismo $f : A \longrightarrow B$ di algebre di Poisson induce una rappresentazione f^*E di A che, come spazio vettoriale è lo stesso, dotata delle azioni

$$a \cdot e = f(a) \cdot e \qquad \text{e} \qquad [\omega, e] = [\Omega f(\omega), e]$$

Questo morfismo induce a sua volta i morfismi di algebre

$$H^\pi_\bullet(A, f^*E) \longrightarrow H^\pi_\bullet(B, E) \qquad \text{e} \qquad H^\bullet_\pi(B, E) \longrightarrow H^\bullet_\pi(A, f^*E)$$

Osserviamo comunque che nel caso geometrico, che ci interessa, questa funtorialità non è quella "giusta: se $A = C^\infty(M)$ e $B = C^\infty(N)$ sono le algebre di Poisson relative alle varietà M e N, una mappa di Poisson $F : M \longrightarrow N$ *non definisce un morfismo di rappresentazioni*: infatti A è una rappresentazione di $\Omega^1(M)$ e B una rappresentazione di $\Omega^1(N)$; ma non si ha $F^*B = A$.

Diamo qualche esempio non banale di rappresentazione.

Esempio. Der A è una rappresentazione rispetto alla

$$[\omega, X] = [\pi^{\#}\omega, X]$$

In effetti

$$\begin{aligned}[\{\omega_1, \omega_2\}, X] &= [\pi^{\#}\{\omega_1, \omega_2\}, X] = [[\pi^{\#}\omega_1, \pi^{\#}\omega_2], X] \\ &= [\pi^{\#}\omega_1, [\pi^{\#}\omega_2, X]] - [\pi^{\#}\omega_2, [\pi^{\#}\omega_1, X]] \\ &= [\omega_1, [\omega_2, X]] - [\omega_2, [\omega_1, X]]\end{aligned}$$

L'identità di Leibniz è ovvia:

$$[\omega, aX] = [\pi^{\#}\omega, aX] = a[\pi^{\#}\omega, X] + \pi(\omega \wedge da)X = a[\omega, X] - i_{X_a}\omega X$$

Si noti che non si tratta di una rappresentazione moltiplicativa:

$$[a\omega, X] = [a\pi^{\#}\omega, X] = a[\omega, X] - X(a)\pi^{\#}\omega$$

Esempio. Ω_A è una rappresentazione rispetto alle azioni associativa

$$a \cdot \omega = a\omega$$

e di Lie

$$[\omega_1, \omega_2]' = \{\omega_1, \omega_2\}$$

In effetti [ ] è una parentesi di Lie e

$$[\omega_1, a\omega_2]' = \{\omega_1, a\omega_2\} = a\{\omega_1, \omega_2\} + \pi(\omega_1 \wedge da)\omega_2 = a\{\omega_1, \omega_2\} - X_a\omega_1\omega_2$$

Di nuovo non si tratta di una rappresentazione moltiplicativa, poiché

$$[a\omega_1, \omega_2]' = -[\omega_2, a\omega_1]' = a[\omega_1, \omega_2]' + X_a\omega_2\omega_1$$

Esempio. Sempre su Ω_A consideriamo una differente rappresentazione

$$[\omega_1, \omega_2]'' = \mathcal{L}_{\pi^{\#}\omega_1}\omega_2$$

Che si tratti di una azione di Lie è ovvio:

$$\begin{aligned}[\{\omega_1, \omega_2\}, \omega_3]'' &= \mathcal{L}_{[\pi^{\#}\omega_1, \pi^{\#}\omega_2]}\omega_3 = [\mathcal{L}_{\pi^{\#}\omega_1}, \mathcal{L}_{\pi^{\#}\omega_2}]\omega_3 \\ &= [\omega_1, [\omega_2, \omega_3]'']'' - [\omega_2, [\omega_1, \omega_3]'']''\end{aligned}$$

Inoltre vale l'identità di Leibniz

$$[\omega_1, a\omega_2]'' = \mathcal{L}_{\pi^{\#}\omega_1}a\omega_2 = \pi(\omega_1 \wedge da)\omega_2 + a[\omega_1, \omega_2]'' = a[\omega_1, \omega_2]'' - X_a\omega_1\omega_2$$

mentre

$$\begin{aligned}[a\omega_1, \omega_2]'' &= \mathcal{L}_{a\pi^{\#}\omega_1}\omega_2 = \pi(\omega_1 \wedge \omega_2)da + ad\pi(\omega_1 \wedge \omega_2) + ai_{\pi^{\#}\omega_1}d\omega_2 \\ &= a\mathcal{L}_{\pi^{\#}\omega_1}\omega_2 + \pi(\omega_1 \wedge \omega_2)da \\ &= a[\omega_1, \omega_2]'' + \pi(\omega_1 \wedge \omega_2)da\end{aligned}$$

e quindi non è moltiplicativa.

Si noti che questi esempi soddisfano alla seguente

Definizione 3.3.4 *Una rappresentazione E di un'algebra di Poisson si dice* regolare *se, per ogni elemento $c \in \operatorname{Cas} A$ si ha che $[dc, e] = 0$ per ogni $e \in E$.*

Ovviamente $\operatorname{Der} A$ è regolare perché $\pi^{\#} dc = X_c = 0$, e Ω_A lo è (sia rispetto a $[]'$ che a $[]''$) in quanto

$$\{dc, \omega\} = \mathcal{L}_{X_c}\omega - d\pi^{\#}\omega(c) - d\pi(dc \wedge \omega) = -d\pi(\omega \wedge dc) + d\pi(\omega \wedge dc) = 0$$

Naturalmente questi esempi corrispondono alle già note strutture di modulo di Poisson su $\operatorname{Der} A$ e Ω_A:

$$[da, X] = [X_a, X] = \{a, X\}$$

mentre sia $[]'$ che $[]''$ danno luogo alla medesima struttura di Poisson:

$$\begin{aligned}
[da, \omega]' = \{da, \omega\} &= \mathcal{L}_{X_a}\omega - \mathcal{L}_{\pi^{\#}\omega} da - d\pi(da \wedge \omega) \\
&= \{a, \omega\} - d\pi^{\#}\omega(da) - d\pi^{\#} da(\omega) \\
&= \{a, \omega\}
\end{aligned}$$

e

$$[da, \omega]'' = \mathcal{L}_{X_a}\omega$$

Tuttavia non ogni modulo da noi incontrato è indotto da qualche rappresentazione: ad esempio A' non è una rappresentazione rispetto all'azione coaggiunta come A-modulo e rispetto all'azione coaggiunta su Ω_A:

$$[\omega, \varphi] = \varphi \circ \pi^{\#}\omega$$

Infatti è solo una antirappresentazione dell'algebra di Lie Ω_A

$$\begin{aligned}
[\{\omega_1, \omega_2\}, \varphi] &= \varphi(\pi^{\#}\{\omega_1, \omega_2\})) = \varphi([\pi^{\#}\omega_1, \pi^{\#}\omega_2]) \\
&= \varphi(\pi^{\#}\omega_1(\pi^{\#}\omega_2)) - \varphi(\pi^{\#}\omega_2(\pi^{\#}\omega_1)) \\
&= [\omega_1, \varphi](\pi^{\#}\omega_2) - [\omega_2, \varphi](\pi^{\#}\omega_1) \\
&= [\omega_2, [\omega_1, \varphi]] - [\omega_1, [\omega_2, \varphi]]
\end{aligned}$$

e soprattutto non soddisfa l'identità di Leibniz:

$$[\omega, a\varphi] = a[\omega, \varphi]$$

Ora rammentiamo dal §II-3 che un modulo differenziale (D, δ) possiede in modo naturale un complesso di de Rham, i cui spazi di cocatene sono $\bigwedge^k D$

e il cui differenziale estene δ; abbiamo visto come calcolare δ in termini della contrazione $i : D_\delta \times D \longrightarrow A$:

$$\begin{aligned} i_{X_0\wedge\ldots\wedge X_n}\delta\omega = &\sum_{i=0}^{n}(-1)^i i_{X_i} i_{X_0\wedge\ldots\widehat{X_i}\ldots\wedge X_n}\omega + \\ &+\sum_{i<j}(-1)^{i+j} i_{[X_i,X_j]\wedge X_0\wedge\ldots\widehat{X_i}\ldots\widehat{X_j}\ldots\wedge X_n}\omega \end{aligned}$$

Se consideriamo ad esempio il modulo differenziale universale (Ω_A, d), la coomologia di questo complesso e la coomologia di Poisson sono collegate dalla mappa $\mu : \Omega_A \longrightarrow \operatorname{Der} A$ che induce un morfismo di algebre

$$\mu^* : H_\pi(A) \longrightarrow H_{dR}(\Omega_A)$$

Più in generale, se E è un modulo di Poisson e $\nabla : E \longrightarrow E \otimes \Omega_A$ una connessione piatta (cfr. §II-3) allora gli spazi $E \otimes \bigwedge \Omega_A$ definiscono un complesso la cui mappa di cobordo è ∇, e la mappa $1 \otimes \mu$ induce un morfismo in coomologia

$$(1 \otimes \mu)^* : H_\pi(A, E) \longrightarrow H_\nabla(\Omega_A, E)$$

Consideriamo ad esempio $E = \operatorname{Der} A$: allora un cociclo è una mappa

$$P : \Omega_A \wedge \ldots \wedge \Omega_A \longrightarrow \operatorname{Der} A = \hom_A(\Omega_A, A)$$

e il cobordo possiamo scriverlo come

$$\begin{aligned} dP(\omega_0 \wedge \ldots \wedge \omega_k) = &\sum_{i=0}^{k}(-1)^i[\pi^\#\omega_i, P(\omega_0 \wedge \ldots \wedge \widehat{\omega_i} \wedge \ldots \wedge \omega_k)] \\ &-\sum_{i<j}^{0\ldots k}(-1)^{i+j} P(\{\omega_i, \omega_j\} \wedge \omega_0 \wedge \ldots \wedge \widehat{\omega_i} \wedge \ldots \wedge \widehat{\omega_j} \wedge \ldots \wedge \omega_k) \end{aligned}$$

Ad esempio un 1-cociclo è una mappa $P : \Omega_A \longrightarrow \operatorname{Der} A$ tale che

$$P\{\omega_0, \omega_1\} = [\pi^\#\omega_0, P(\omega_1)] + [P(\omega_0), \pi^\#\omega_1]$$

cioè è una derivazione dell'algebra di Lie Ω_A a coefficienti nella rappresentazione $\operatorname{Der} A$. Si noti che $\pi^\#$ non soddisfa questa equazione, essendo un morfismo di algebre di Lie piuttosto che una derivazione.

Nel caso $E = \Omega_A$ i cocicli sono le mappe lineari $\Omega_A^n \longrightarrow \Omega$ e il cobordo è

$$\begin{aligned} dP(\omega_0 \wedge \ldots \wedge \omega_k) = &\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\{\omega_i, P(\omega_0 \wedge \ldots \wedge \widehat{\omega_i} \wedge \ldots \wedge \omega_k)\} \\ &-\sum_{i<j}^{0\ldots k}(-1)^{i+j} P(\{\omega_i, \omega_j\} \wedge \omega_0 \wedge \ldots \wedge \widehat{\omega_i} \wedge \ldots \wedge \widehat{\omega_j} \wedge \ldots \wedge \omega_k) \end{aligned}$$

Ad esempio un 1-cociclo è una mappa $P : \Omega_A \longrightarrow \Omega_A$ tale che

$$P\{\omega_0, \omega_1\} = [P(\omega_0), \omega_1] + [\omega_0, P(\omega_1)]$$

cioè una derivazione dell'algebra di Lie Ω_A; un 2-cociclo è una mappa $P : \Omega_A^2 \longrightarrow \Omega_A$ tale che

$$\begin{aligned} 0 = \{\omega_0, P(\omega_1, \omega_2)\} + &\{\omega_1, P(\omega_2, \omega_0)\} + \{\omega_2, P(\omega_0, \omega_1)\} + \\ &- P(\{\omega_0, \omega_1\}, \omega_2) - P(\{\omega_1, \omega_2\}, \omega_0) - P(\{\omega_2, \omega_0\}, \omega_1) \end{aligned}$$

Un immediato esempio è proprio il commutatore $\{\,\}$ dell'algebra di Lie Ω_A.

Fin qui le coomologie che abbiamo considerato sono essenzialmente due: la coomologia di de Rham, cioè dell'algebra di Lie $\operatorname{Der} A$, e la coomologia di Poisson, cioè dell'algebra di Lie Ω_A, a coefficienti in una qualsiasi rappresentazione.

Esiste comunque un'altra algebra di Lie (oltre ad A stessa) che gioca un ruolo importante nel nostro contesto, e che non abbiamo finora considerato: l'algebra $\mathcal{H}_A$ del modulo generato dai campi hamiltoniani. Questo modulo per certi aspetti ricorda $\operatorname{Der} A$, trattandosi in effetti di un suo sottomodulo, per altri Ω_A, essendo ad esempio un modulo differenziale.

Supponiamo ora che E sia una rappresentazione di A: possiamo definire allora

$$[X, e] = [\omega, e]$$

ove $\pi^{\#}\omega = X$, utilizzando l'azione di Ω_A su E. Se E è una rappresentazione regolare allora questa definizione è ben posta: infatti da $\pi^{\#}\omega_1 = \pi^{\#}\omega_2 = X$ segue che $\omega_2 = \omega_1 + \varphi$, ove $\varphi \in \ker \pi^{\#}$ e quindi

$$[\omega_2, e] = [\omega_1, e] + [\varphi, e] = [\omega_1, e]$$

dato che, per una rappresentazione regolare, $[dc, e] = 0$ per $c \in \mathrm{CasA}$, e questa sottoalgebra genera il modulo $\ker \pi^{\#}$.

Dunque una rappresentazione regolare induce una azione di Lie di $\mathcal{H}_A$ su E: che si tratti di una azione di Lie è ovvio:

$$\begin{aligned} [[X_1, X_2], e] &= [[\pi^{\#}\omega_1, \pi^{\#}\omega_2], e] = [\pi^{\#}\{\omega_1, \omega_2\}, e] \\ &= [\{\omega_1, \omega_2\}, e] = [\omega_1, [\omega_2, e]] - [\omega_2, [\omega_1, e]] \\ &= [X_1, [X_2, e]] - [X_2, [X_1, e]] \end{aligned}$$

L'identità di Leibniz per la rappresentazione diviene

$$\begin{aligned} [X, ae] = [\pi^{\#}\omega, ae] &= [\omega, ae] = a[\omega, e] - i_{X_a}\omega e \\ &= a[X, e] + \pi(\omega \wedge a)e = a[X, e] + i_{\pi^{\#}\omega} dae \\ &= a[X, e] + (Xa)e \end{aligned}$$

Proposizione 3.3.5 *Se E è una rappresentazione dell'algebra di Lie $\mathcal{H}_A$ che soddisfa l'identità di Leibniz*

$$[X, ae] = a[X, e] + (Xa)e$$

e che è anche un modulo su A allora E è indotta da una rappresentazione regolare di A.

DIMOSTRAZIONE: Definiamo ovviamente, per $\omega \in \Omega_A$ ed $e \in E$

$$[\omega, e] = [\pi^{\#}\omega, e]$$

In questo modo otteniamo, per i calcoli appena svolti, una rappresentazione dell'algebra di Lie Ω_A, che soddisfa l'identità di Leibniz. La sua regolarità segue dall'essere

$$[dc, e] = [\pi^{\#}dc, e] = [X_c, e] = 0$$

QED

Cioè le rappresentazioni regolari possono considerarsi come oggetti definiti su $\mathcal{H}_A$.

Ad esempio la rappresentazione Der A, che è regolare, dà luogo alla rappresentazione aggiunta dell'algebra di Lie $\mathcal{H}_A$, cioè l'azione di Lie è esattamente il commutatore di un campo in $\mathcal{H}_A$ con una derivazione qualsiasi.

Nel caso Ω_A rispetto alla rappresentazione

$$[\omega_1, \omega_2] = \{\omega_1, \omega_2\}$$

otteniamo

$$\begin{aligned}[X, \omega] &= \mathcal{L}_X\omega - \mathcal{L}_{\pi^{\#}\omega}\pi^{\#-1}X - di_{\pi^{\#}\pi^{\#-1}X}\omega \\ &= \mathcal{L}_X\omega - \mathcal{L}_{\pi^{\#}\omega}\pi^{\#-1}X - di_X\omega \\ &= i_Xd\omega - di_{\pi^{\#}\omega}\pi^{\#-1}X - i_{\pi^{\#}\omega}d\pi^{\#-1}X\end{aligned}$$

Nel caso della rappresentazione

$$[\omega_1, \omega_2] = \mathcal{L}_{\pi^{\#}\omega_1}\omega_2$$

otteniamo

$$[X, \omega] = \mathcal{L}_X\omega$$

Passiamo ora alla coomologia: se E è una rappresentazione regolare di A possiamo considerare il complesso $C^n(\mathcal{H}_A, E) = \hom_{\mathbb{K}}(\mathcal{H}_A^n, E)$ rispetto alle mappe di cobordo

$$\begin{aligned} dP(X_0, ..., X_k) = &\sum_{i=0}^{k}(-1)^i[X_i, P(X_0, ..., \widehat{X_i}, ..., X_k)]+ \\ &+\sum_{i<j}^{0...k}(-1)^{i+j}P([X_i, X_j], X_0, ..., \widehat{X_i}, ..., \widehat{X_j}, ..., X_k) \end{aligned}$$

La coomologia $H(\mathcal{H}_A, E)$ di questo complesso, che discuteremo più oltre in veste geometrica, è legata anche all'algebra delle parentesi di Poisson su A; si noti che la mappa $\Omega_A \longrightarrow \mathcal{H}_A$ induce una mappa in coomologia

$$\pi^* : H(\mathcal{H}_A, E) \longrightarrow H_\nabla(A, E)$$

Se la struttura di Poisson è simplettica allora π è un isomorfismo e, *a fortiori*, anche π^* lo è; se la struttura di Poisson è nulla allora $H_\pi(A, E)$ coincide con l'intero spazio, mentre $H(\mathcal{H}_A, E)$ è nullo in grado positivo; questa coomologia è quindi "ridotta rispetto a quella di Poisson usuale, ma più semplice da calcolare.

Ovviamente per ogni A-modulo differenziale (D, δ) che sia anche un'algebra di Lie e per ogni modulo di Poisson E su A possiamo effettuare una simile costruzione: in particolare possiamo considerare il caso $D = \mathcal{H}_A$. Si rammenti che in questo caso il differenziale è $X : A \longrightarrow \mathrm{Ham}(A)$ esteso come

$$X(aX(b)) = X(a) \wedge X(b)$$

e che abbiamo una contrazione $i : \mathrm{Ham}\, A \times \mathcal{H}_A \longrightarrow A$ per mezzo della quale possiamo calcolare il differenziale come

$$\begin{aligned} i_{X_0\wedge...\wedge X_n}X(P) = &\sum_{i=0}^{n}(-1)^i i_{X_i} i_{X_0\wedge...\widehat{X_i}...\wedge X_n}P+ \\ &+\sum_{i<j}(-1)^{i+j} i_{[X_i,X_j]\wedge X_0\wedge...\widehat{X_i}...\widehat{X_j}...\wedge X_n}P \end{aligned}$$

ove $P \in \bigwedge^n \mathrm{Ham}\, A$, $X_i = X_{a_i} \in \mathrm{Ham}\, A$. Ad esempio

$$i_{X_a\wedge X_b}X(P) = i_{X_a} i_{X_b}P - i_{X_b} i_{X_a}P - i_{X_{\{a,b\}}}P$$

(si ricordi che $i_{X_a}X_b = \{a, b\}$).

Naturalmente queste coomologie sono connesse da un diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} H_{dr}(\Omega_A) \arrow[r] \arrow[d] & H_\pi(A) \arrow[d] \\ H_{dr}(\mathcal{H}_A) \arrow[r] & H_\pi(\mathcal{H}_A, A) \end{tikzcd}$$

ove le frecce verticali sono indotte da $\pi^\# : \Omega_A \longrightarrow \mathcal{H}_A$.

Se ora E è un A-modulo e $\nabla : E \longrightarrow E \otimes \mathcal{H}_A$ una $\mathcal{H}_A$-connessione piatta, gli spazi $E \otimes \bigwedge \mathcal{H}_A$ definiscono un complesso la cui coomologia denotiamo con $H_\nabla(\mathcal{H}_A, E)$. Allora possiamo tracciare un altro diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} H_\nabla(\Omega_A, E) \arrow[r] \arrow[d] & H_\pi(E) \arrow[d] \\ H_\nabla(\mathcal{H}_A, E) \arrow[r] & H_\pi(\mathcal{H}_A, E) \end{tikzcd}$$

3.4 Connessioni e moduli di Poisson

Consideriamo ora un'algebra di Poisson A, il suo spazio dei campi hamiltoniani $\mathrm{Ham}(A)$ e il modulo $\mathcal{H}_A$ da essi generato; sappiamo che $(\mathcal{H}_A, X)$ è un modulo differenziale (X_a è il campo hamiltoniano generato da $a \in A$), e quindi possiamo considerare $\mathcal{H}_A$-connessioni in A-moduli:

$$\nabla(as) = a\nabla s + s \otimes X_a$$

Definizione 3.4.1 *Una $\mathcal{H}_A$-connessione in un A-modulo E si dice* connessione hamiltoniana.

Una tale connessione determina (ed è determinata da) una *derivata covariante hamiltoniana*

$$\mathbf{D} : \mathcal{H}_A \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)$$

che soddisfa alla

$$\mathbf{D}_X(ae) = a\mathbf{D}_X e + X(a)e$$

Supponiamo che l'A-modulo E possegga una tale connessione: allora se poniamo

$$\{a, e\} := \mathbf{D}_{X_a} e$$

otteniamo una applicazione $\mathbb{K}$-bilineare $\{\,\} : A \times E \longrightarrow E$ tale che

$$\{a, be\} = \mathbf{D}_{X_a}(be) = b\mathbf{D}_{X_a} e + X_a(b)e = b\{a, e\} + \{a, b\}e$$

Inoltre

$$\{ab, e\} = \mathbf{D}_{X_{ab}}e = \mathbf{D}_{aX_b}e + \mathbf{D}_{bX_a}e = a\mathbf{D}_{X_b}e + b\mathbf{D}_{X_a}e = a\{b, e\} + b\{a, e\}$$

Dunque, affinché le parentesi $\{\,\}$ rendano E un modulo di Poisson moltiplicativo, basta che definiscano una azione di Lie: l'ostruzione a che ciò si avveri è che la seguente funzione

$$R(a, b)(e) = \{a, \{b, e\}\} - \{b, \{a, e\}\} - \{\{a, b\}, e\}$$

sia identicamente nulla. Ma

$$\{a, \{b, e\}\} = \mathbf{D}_{X_a}\mathbf{D}_{X_b}e$$

e

$$\{\{a, b\}, e\} = \mathbf{D}_{X_{\{a,b\}}}e = \mathbf{D}_{[X_a,X_b]}e$$

sicché

$$R(a, b) = [\mathbf{D}_{X_a}, \mathbf{D}_{X_b}] - \mathbf{D}_{[X_a,X_b]} = R_{\mathbf{D}}(X_a, X_b)$$

il che vuol dire che le parentesi $\{\,\}$ definiscono un modulo di Lie se e solo se la connessione ∇ è piatta.

Ora, se due connessioni hamiltoniane ∇ e ∇' determinano la stessa struttura di Poisson $\{\,\}$ su E allora la mappa A-lineare $\nabla - \nabla' \in \mathrm{End}(E)$ è tale che, per ogni $a \in A$:

$$i_{X_a}(\nabla e - \nabla' e) = 0$$

e quindi, poiché la contrazione $i : \mathcal{H}_A \times \mathcal{H}_A \longrightarrow A$ è non degenere, $\nabla = \nabla'$. Dunque esiste una mappa iniettiva

$$\{\mathcal{H}_A\text{-connessioni piatte}\} \longrightarrow \{\text{strutture moltiplicative su } E\}$$

In generale questa mappa non è suriettiva, il che vuol dire che non ogni struttura di modulo di Poisson moltiplicativo viene da una connessione piatta. Ad esempio basta considerare moduli non proiettivi che quindi non possono avere connessioni, come il modulo delle distribuzioni $\mathcal{D}(M)'$ (cioè dei funzionali lineari e continui su $C_c^\infty(M)$, cfr. [89], [101]) rispetto all'azione di Poisson coaggiunta: se $f \in C^\infty(M)$, $\varphi \in C_c^\infty(M)$ e $T \in \mathcal{D}(M)'$

$$\{f, T\}(\varphi) = T\{f, \varphi\}$$

Si tratta di una struttura di Poisson moltiplicativa, come abbiamo già osservato, ma il modulo $\mathcal{D}(M)'$ non è proiettivo: le distribuzioni non sono le sezioni di alcun fibrato vettoriale.

Inoltre non è detto che una connessione hamiltoniana esista sempre; l'esempio più semplice è probabilmente il seguente: consideriamo la sfera S^2 rispetto alla forma simplettica data dall'elemento d'area; in questo caso, poiché la struttura è non degenere, il modulo $\mathcal{H}_A$ coincide con quello dei campi vettoriali sulla sfera, e una connessione hamiltoniana è una connessione nel senso usuale del termine: dato che S^2 è semplicemente connessa ma non parallelizzabile non esistono connessioni piatte sul modulo $E = \Omega^1(S^2)$ delle 1-forme differenziali (cfr. [53, Vol.I, §II-9]).

Affinché si possa indurre una connessione da una struttura di Poisson moltiplicativa è sufficiente ad esempio che il modulo $\mathcal{H}_A$ generato dai campi hamiltoniani sia libero su A: infatti se $\mathcal{H}_A = A^n$ allora possiamo scrivere ogni suo elemento X come $X = \sum_i a_i X_{h_i}$ ove $a_i, h_i \in A$ sono univocamente determinate. Allora, se $\{\,\}$ è una struttura di modulo di Poisson moltiplicativa su un modulo E possiamo definire una derivata covariante hamiltoniana $\mathbf{D}$ come

$$\mathbf{D}_{\sum_i a_i X_{h_i}} e = \sum_i a_i \{h_i, e\}$$

Questa definizione è ben posta proprio perché il modulo $\mathcal{H}_A$ è libero, e definisce una mappa $\mathbb{K}$-bilineare; inoltre, se $X \in \mathcal{H}_A$

$$\mathbf{D}_{aX} e = \mathbf{D}_{a \sum_i a_i X_{h_i}} e = \mathbf{D}_{\sum_i a a_i X_{h_i}} e = \sum_i a a_i \{h_i, e\} = a \sum_i a_i \{h_i, e\}$$

L'identità di Leibniz per la derivata covariante segue immediatamente:

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_X ae &= \mathbf{D}_{\sum_i a_i X_{h_i}} ae = \sum_i a_i \{h_i, ae\} \\
&= \sum_i a_i (\{h_i, a\} e + a \{h_i, e\}) = a \sum_i a_i \{h_i, e\} + \sum_i a_i X_{h_i}(a) e \\
&= a \mathbf{D}_X e + X(a) e
\end{aligned}$$

Infine mostriamo che la connessione indotta dalla struttura di Poisson è piatta:

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_{[aX_h, bX_k]} &= \mathbf{D}_{ab[X_h, X_k]} + \mathbf{D}_{aX_h(b)X_k} - \mathbf{D}_{bX_k(a)X_h} \\
&= ab \mathbf{D}_{X_{\{h,k\}}} + aX_h(b) \mathbf{D}_{X_k} - bX_k(a) \mathbf{D}_{X_h} \\
&= ab \mathbf{D}_{[X_h, X_k]} + aX_h(b) \mathbf{D}_{X_k} - bX_k(a) \mathbf{D}_{X_h} \\
&= ab [\mathbf{D}_{X_h}, \mathbf{D}_{X_k}] + aX_h(b) \mathbf{D}_{X_k} - bX_k(a) \mathbf{D}_{X_h} \\
&= ab \mathbf{D}_{X_h} \mathbf{D}_{X_k} + aX_h(b) \mathbf{D}_{X_k} - ab \mathbf{D}_{X_k} \mathbf{D}_{X_h} - bX_k(a) \mathbf{D}_{X_h} \\
&= a \mathbf{D}_{X_h} b \mathbf{D} X_k - b \mathbf{D}_{X_k} a \mathbf{D} X_h \\
&= \mathbf{D}_{aX_h} \mathbf{D}_{bX_k} - \mathbf{D}_{bX_k} \mathbf{D}_{aX_h}
\end{aligned}$$

Per linearità il risultato è valido in generale; abbiamo usato la $[\mathbf{D}_{X_h}, \mathbf{D}_{X_k}] = \mathbf{D}_{[X_h, X_k]}$ che equivale ovviamente all'essere l'azione del modulo di Poisson un'azione di Lie:

$$\mathbf{D}_{X_{\{h,k\}}} e = \{\{h,k\}, e\} = \{h, \{k, e\}\} - \{k, \{h, e\}\} = \mathbf{D}_{X_h}\mathbf{D}_{X_k} e - \mathbf{D}_{X_k}\mathbf{D}_{X_h} e$$

Dunque

Teorema 3.4.2 *Se il modulo $\mathcal{H}_A$ indotto da un'algebra di Poisson A è libero allora esiste una corrispondenza biunivoca fra $\mathcal{H}_A$-connessioni piatte e strutture di modulo di Poisson moltiplicative su un A-modulo.*

In ogni caso, la mappa

$$\{\mathcal{H}_A\text{-connessioni piatte}\} \longrightarrow \{\text{strutture moltiplicative su } E\}$$

si fattorizza come

$$\begin{tikzcd}
\left\{\begin{matrix}\mathcal{H}_A\text{-connessioni} \\ \text{piatte}\end{matrix}\right\} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \left\{\begin{matrix}\text{moduli di Poisson} \\ \text{moltiplicativi}\end{matrix}\right\} \\
& \left\{\begin{matrix}\text{Rappresentazioni} \\ \text{moltiplicative}\end{matrix}\right\} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Infatti una $\mathcal{H}_A$-connessione $\nabla : E \longrightarrow E \otimes \mathcal{H}_A$ (o meglio la sua derivata covariante) determina una rappresentazione E come

$$[\omega, e] = \mathbf{D}_{\pi^{\#}\omega} e$$

dato che ($\pi^{\#}$ è antisimmetrico)

$$[\omega, ae] = \mathbf{D}_{\pi^{\#}\omega} ae = a[\omega, e] + i_{\pi^{\#}\omega} da \otimes e = a[\omega, e] - i_{X_a}\omega \otimes e$$

Evidentemente si tratta di una rappresentazione moltiplicativa

$$[a\omega, e] = \mathbf{D}_{a\pi^{\#}\omega} e = a\mathbf{D}_{\pi^{\#}\omega} e = a[\omega, e]$$

Notiamo che la mappa che porta una $\mathcal{H}_A$-connessione in una rappresentazione è iniettiva, mentre non è suriettiva in generale: possiamo comunque caratterizzare la sua immagine come lo spazio delle rappresentazioni moltiplicative regolari, cioè tali che $[\omega, e] = 0$ se $\omega \in \ker \pi^{\#}$. Infatti se $[\,]$ è una tale rappresentazione allora la definizione

$$\mathbf{D}_X e = [\pi^{\#-1} X, e]$$

è ben posta, dato che se $\omega \in \pi^{\#-1}X$ allora $\omega = \pi^{\#-1}X + \gamma$ ove γ è una forma che si annulla su qualsiasi elemento dello spazio $\mathcal{H}_A$: ne segue che, per regolarità della rappresentazione,

$$\mathbf{D}_X e = [\pi^{\#-1}X, e] = [\pi^{\#-1}X + \gamma, e] = \mathbf{D}_{\pi^\#\omega} e$$

In séguito discuteremo geometricamente le differenze fra connessioni hamiltoniane piatte, rappresentazioni e moduli di Poisson.

Diamo un ulteriore approccio alle D-connessioni che ha interesse nel caso delle algebre di Poisson: sia A una $\mathbb{K}$-algebra associativa e commutativa, e sia B una sottoalgebra che contiene l'unità. Possiamo allora considerare i differenziali Ω_B sull'algebra B, ma anche il B-modulo $\Omega_{A/B}$ dei differenziali di A su B, cioè dei differenziali di A B-lineari; questo può ottenersi ad esempio quozientando Ω_A per l'ideale generato dagli elementi $d(ab) - bda$ per $a \in A$ e $b \in B$. È ben noto il seguente

Lemma 3.4.3 *Esiste una successione esatta*

$$\Omega_B \otimes_B A \xrightarrow{m} \Omega_A \xrightarrow{p} \Omega_{A/B} \longrightarrow 0$$

di B-moduli differenziali.

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo la proiezione p di Ω_A sul suo quoziente $\Omega_{A/B}$: se $adb \in \ker p$ allora $b \in B$ e quindi questo elemento sta nell'immagine della mappa $m : \Omega_B \otimes_B A \longrightarrow \Omega_A$ definita come

$$m(db \otimes a) = adb$$

Viceversa se $adb \in \operatorname{im} m$ allora $b \in B$ e quindi $p(adb) = abd1 = 0$.

QED

Definizione 3.4.4 *Una* connessione di tipo B *in un A-modulo E è un operatore B-lineare*

$$\nabla : E \longrightarrow E \otimes_A \Omega_{A/B}$$

che soddisfi alla identità di Leibniz

$$\nabla(ae) = a\nabla e + e \otimes da$$

per $a \in A$ ed $e \in E$.

Cioè chiediamo che gli elementi di B si comportino come costanti rispetto alla connessione.

Teorema 3.4.5 *Dato un A-modulo E esiste una corrispondenza biunivoca fra D-connessioni e connessioni di tipo B.*

Dimostrazione: Consideriamo una connessione ∇ di tipo B, e il modulo differenziale $(\Omega_{A/B}, d)$. Allora ∇ è una $\Omega_{A/B}$-connessione pre definizione. Se invece abbiamo un modulo differenziale (D, δ) e una D-connessione ∇ in E, allora consideriamo l'insieme degli 0-cocicli

$$Z^0(D) = \ker \delta = \{a \in A \mid \delta a = 0\}$$

Ovviamente se $c, c' \in Z^0(D)$ allora $\delta(cc') = c\delta c' + c'\delta c = 0$, quindi si tratta di una sottoalgebra associativa di A, e la D-connessione ∇ corrisponde ad una connessione di tipo $Z^0(D)$:

$$\nabla(ce) = c\nabla e + e \otimes \delta c = c\nabla e$$

QED

Corollario 3.4.6 *Su un modulo E su un'algebra di Poisson esiste una corrispondenza biunivoca fra connessioni hamiltoniane e connessioni di tipo* $\mathrm{Cas}\, A$.

Capitolo 4

Geometria dei moduli di Poisson

In questo capitolo arricchiamo la nostra speculazione, che finora è stata puramente algebrica negli aspetti teorici e quindi assai formale, di contenuto geometrico, considerando sistematicamente un'algebra di Poisson $A = C^\infty(M)$ che sia l'algebra delle funzioni di una varietà di Poisson. Vogliamo spostare l'attenzione su taluni moduli di Poisson nel tentativo di ampliare l'orizzonte del calcolo differenziale che abbiamo fin qui delineato e in particolare per trovare un degno sostituto alla teoria dell'integrazione che non sembra avere analoghi immediati rispetto al caso usuale. Per cominciare studiamo geometricamente il modulo $\mathcal{H}_A$ generato dai campi hamiltoniani di un'algebra di Poisson; quindi consideriamo il concetto generale di fibrato di Poisson come riflesso geometrico delle nozioni di modulo e rappresentazione di Poisson; infine introduciamo un modulo di Poisson che non corrisponde ad alcun fibrato ma che consente di introdurre nuovi invarianti.

4.1 Campi e tensori simplettici

Se $M = \bigcup_x S_x$ è la decomposizione in foglie simplettiche di una varietà di Poisson M, possiamo considerare le immersioni $i : S_x \hookrightarrow M$ e cercare di "trasportare i concetti usuali dalla varietà simplettica S_x a quella di Poisson M: non è immediatamente chiaro come ciò possa farsi; ad esempio né una forma differenziale né un campo vettoriale su S_x si possono proiettare su M. Siamo cioè costretti a dare una

Definizione 4.1.1 *Un* campo vettoriale simplettico *su una varietà di Poisson è un campo vettoriale $X \in \mathfrak{X}(M)$ tale che per ogni $x \in M$ se S_x è la foglia simplettica contenente x allora $X|_{S_x} \in \mathfrak{X}(TS_x)$. Denotiamo lo spazio dei campi vettoriali simplettici con il simbolo $\mathfrak{S}(M)$.*

In altri termini un campo vettoriale è simplettico se i vettori che punto per punto lo definiscono appartengono agli spazi tangenti alla foglia in quel punto, cioè se la restrizione del campo vettoriale alla foglia simplettica definisce un campo vettoriale sulla foglia[1].

Ovviamente su una varietà simplettica $\mathfrak{S}(S) = \mathfrak{X}(S)$, mentre su una varietà di Poisson nulla $\mathfrak{S}(M) = 0$, poiché ogni punto è esso stesso una foglia simplettica.

Notiamo che se $i_S : S \longrightarrow M$ è l'inclusione di una foglia in M allora, se $s \in S$:

$$(X|_S)_s = X_{i(s)}$$

e quindi, se X è simplettico, $Xf(s) = \langle (df)_S, X_s \rangle$.

I campi simplettici ci interessano in primo luogo perché generalizzano i campi hamiltoniani:

$$\operatorname{Ham} M \subset \mathfrak{S}(M)$$

e anche i campi localmente hamiltoniani: rifacendoci alla terminologia introdotta nel §II-2 osserviamo che

Proposizione 4.1.2 *Lo spazio dei campi simplettici $\mathfrak{S}(M)$ è esattamente il modulo di Poisson differenziale generato dallo spazio dei campi hamiltoniani.*

DIMOSTRAZIONE: Basta notare che i campi simplettici sono generati, come $C^\infty(M)$-modulo, dall'algebra di Lie dei campi hamiltoniani, il che segue per definizione; possiamo quindi identificare $\mathfrak{S}(M)$ col modulo $\mathcal{H}(C^\infty(M))$ introdotto nel §II, che sappiamo essere un modulo di Poisson (cfr. §III-1).

QED

Notiamo comunque che un campo canonico non è necessariamente simplettico: infatti basta considerare una varietà di Poisson nulla sulla quale ogni campo è canonico ma il solo campo simplettico è quello identicamente nullo; inoltre un campo localmente hamiltoniano non è necessariamente simplettico: un semplice controesempio procede come segue.

Esempio. Sul piano di Poisson $\mathbb{R}^2_\pi$ i campi simplettici debbono annullarsi nei punti di rango nullo. Consideriamo in particolare il piano di Poisson $\mathbb{R}^2_\pi$ con $\pi(x, y) = y^2$: le sue foglie simplettiche sono i semipiani superiore e inferiore del piano cartesiano e ciascun punto della retta $\{y = 0\}$ delle ascisse; il campo vettoriale $y\partial_x$ è ovviamente simplettico: infatti la sua restrizione nel semipiano superiore (o inferiore) definisce un campo vettoriale in quel semipiano, e su un

[1] Un concetto simile, come ci è stato fatto rilevare, è stato definito nella teoria degli spazî fogliati da Moore e Schochet [76], che parlano di "campi tangenziali; tuttavia l'uso che ne faremo noi è diverso e le proprietà che ci interessano sono proprie delle strutture di Poisson qualsiasi, quindi non necessariamente legate a fogliazioni nel senso classico (anche se quelle considerate da Moore e Schochet non sono fogliazioni differenziabili): questo, riteniamo, ci autorizza ad una terminologia autonoma.

punto della retta $\{y = 0\}$ il campo è nullo; tuttavia, pur essendo simplettico, questo campo non è localmente hamiltoniano, dato che

$$y\partial_x = X_f \quad \Longrightarrow \quad y\frac{\partial g}{\partial x} = y^2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

(per ogni g) il che implica $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ e $y\frac{\partial f}{\partial y} = -1$ sicché, attorno ad un punto singolare della retta $\{y = 0\}$, il campo non può essere hamiltoniano.

Lo spazio dei campi simplettici svolgerà per noi il ruolo che le forme differenziali rivestono nel caso simplettico: ad esempio, se S è una varietà simplettica, allora $\mathfrak{S}(S) = \mathfrak{X}(S)$ e quindi, per tramite dell'isomorfismo indotto dalla forma simplettica, $\mathfrak{S}(S) \cong \Omega^1(S)$ come $C^\infty(M)$-moduli. Ricordiamo che l'azione di Lie di $C^\infty(M)$ sul modulo di Poisson $\mathfrak{S}(M)$ è

$$\{f, X\} = [X_f, X]$$

Nel caso simplettico osserviamo che, applicando l'isomorfismo $\pi^\#$:

$$\{f, \pi^\#\omega\} = [X_f, \pi^\#\omega] = \pi^\#\{df, \omega\}$$

Quindi il modulo di Poisson $\mathfrak{S}(M)$ è isomorfo a $\Omega^1(M)$ rispetto alla struttura di Poisson usuale.

Notiamo inoltre che se $X \in \mathfrak{S}(M \times N)$ allora $X|_S \in \mathfrak{X}(S)$ per ciascuna foglia simplettica; ma $S = S_N \times S_M$ e quindi $\mathfrak{X}(S) \cong \mathfrak{X}(S_N) \oplus \mathfrak{X}(S_M)$, da cui segue la

Proposizione 4.1.3 $\mathfrak{S}(M \times N) \cong \mathfrak{S}(N) \oplus \mathfrak{S}(N)$

La definizione di campo simplettico si può estendere in realtà a qualsiasi campo tensoriale: i tensori che ci interessano (come visto nel §II) sono quelli controvarianti antisimmetrici, dunque sarà conveniente dare la

Definizione 4.1.4 *Un* tensore controvariante antisimmetrico simplettico *(o semplicemente* p-tensore simplettico *ove p è l'ordine del tensore) è un tensore controvariante antisimmetrico che, qualora ristretto ad una qualsiasi foglia simplettica, appartenga allo spazio dei campi tensoriali di quella foglia. Lo spazio dei tensori simplettici di ordine p si denota con $\mathfrak{S}^p(M)$.*

Più concisamente, un tensore $P \in \bigwedge^p \mathfrak{X}(M)$ è simplettico se $P|_S \in \bigwedge^p \mathfrak{X}(S)$ per ciascuna foglia simplettica $S \subset M$.

Lemma 4.1.5 *Il tensore di Poisson π è un 2-campo simplettico.*

DIMOSTRAZIONE: Basta osservare che

$$\{f,g\}(x) = \{f|_S, g|_S\}|_S(x)$$

ove S è la foglia simplettica contenente x, e che $\pi(df, dg) = \{f,g\}$.

QED

Vogliamo ora ottenere geometricamente lo spazio $\mathfrak{S}(M)$ come immagine della mappa $\pi^\# : T^*M \longrightarrow TM$ indotta dalla struttura di Poisson: per farlo stabiliamo prima un

Lemma 4.1.6 *$X \in \mathfrak{S}(M)$ se e solo se per ogni forma $\alpha \in \Omega^1(M)$ tale che in ciascuna foglia simplettica $S \subset M$ si abbia $s^*\alpha = 0$ si ha anche $i_X\alpha = 0$, ove $s : S \longrightarrow M$ è l'immersione di S in M e $s^*\alpha$ il pull-back di forme differenziali.*

DIMOSTRAZIONE: Se $X \in \mathfrak{S}(M)$ e α è tale che $s^*\alpha = 0$ per ogni S, allora se $x \in M$ e S_x è la foglia contenente x:

$$i_X\alpha(x) = \alpha_x(X_x) = \alpha_x((X|_S)_x) = 0$$

(dato che $(X|_S)_x \in T_xS_x$). Viceversa supponiamo che X soddisfi alla condizione dell'enunciato e che $x \in S \subset M$; allora, se $X|_S(x)$ non appartenesse a T_xS_x, esisterebbe una forma differenziale $\alpha \in \Omega^1(M)$ tale che $\alpha_x \in T_x^*S_x$ sarebbe non nullo se calcolato sul vettore $(X|_{S_x})_x$ ma anche tale che $s^*\alpha = 0$, da cui $i_X\alpha(x) \neq 0$, il che è assurdo.

QED

Teorema 4.1.7 $\operatorname{im}\pi^\# = \mathfrak{S}(M)$.

DIMOSTRAZIONE: Se $X \in \operatorname{im}\pi^\#$ allora $i_\alpha X = \pi(\beta_X, \alpha)$ per ciascuna $\alpha \in \Omega^1(M)$ e qualche $\beta_X \in \Omega^1(M)$, e dunque, per il lemma 4.1.5, $X \in \mathfrak{S}(M)$.

Viceversa, se $i_S : S \longrightarrow M$ è una foglia simplettica e $\sigma = \pi|_S$ il suo tensore di Poisson (invertibile) il seguente diagramma (che ha senso in quanto $\operatorname{im}\pi^\# \subset \mathfrak{S}(M)$) commuta:

$$\begin{tikzcd} \Omega^1(M) \arrow[r, "\pi^\#"] \arrow[d] & \mathfrak{S}(M) \arrow[d] \\ \Omega^1(S) \arrow[r, "\sigma^\#"'] & \mathfrak{X}(S) \end{tikzcd}$$

(le frecce verticali sono il *pull-back* di 1-forme e la restrizione di campi di vettori). Dunque ad ogni campo $X \in \mathfrak{S}(M)$ possiamo associare una 1-forma

$\beta_X = \sigma^\flat(X|_S)$ su S e, dato che la varietà è unione delle foglie simplettiche, possiamo sollevare ciascuna di queste forme alla forma $\alpha \in \Omega^1(M)$ differenziale (perché la fogliazione lo è) che induce, per *pull-back*, ogni tale β_X. Ora usiamo la commutatività del diagramma per concludere che, per ogni foglia S,

$$(\pi^\# \alpha)|_S = \sigma^\# (i_S^* \alpha)$$

e quindi $\pi^\# \alpha = X$.

QED

I campi simplettici presentano dunque un "comportamento ambiguo: sulle foglie simplettiche si possono far corrispondere alle forme differenziali, per mezzo dell'isomorfismo fra campi e forme indotto dalla forma simplettica della foglia, anche se restano pur sempre campi vettoriali sulla varietà M: ad esempio, se X un campo vettoriale simplettico su M, possiamo considerarne il flusso, vale a dire la famiglia ad un parametro $\{\Phi_t\}$ di diffeomorfismi locali attorno a ciascun $x \in M$ associata a X. Dato che, se $x_0 \in M$, in un opportuno intorno U_0 di x_0 l'equazione differenziale ordinaria

$$t \in I \qquad X(c(t)) = \dot{c}\,(t)$$

con condizione iniziale $X(0) = \dot{c}\,(0)$ ha soluzione unica (c, I), possiamo chiederci come la simpletticità di X incida su c; ovviamente possiamo considerare $U_0 = S_0 \times N_0$, e quindi abbiamo una coppia di curve (c_S, c_N) determinate dalla curva integrale massimale c di X in U_0. Ora, dato che X è simplettico, $X(x_0)$ appartiene allo spazio tangente alla foglia $S_0 \times \{x_0\}$ in x_0, il che vuol dire che in x_0 il vettore tangente alla curva integrale c è tangente alla foglia. Dunque, punto per punto, il vettore tangente alla foglia è simplettico e, poiché lo spazio dei campi simplettici è generato dai campi hamiltoniani, a tratti la curva ha campo tangente hamiltoniano.

In altri termini, le curve integrali di un campo simplettico sono esattamente le curve che rendono appartenenti alla medesima foglia tutti i punti passanti per esse. Questo implica che la curva è completamente contenuta in una singola foglia simplettica, e che quindi il flusso Φ_t definito come

$$\Phi_t(x_0) = c(t)$$

è in realtà un diffeomorfismo locale della foglia in sé.

Si noti che questo flusso non preserva la struttura simplettica della foglia, a meno che il campo X non sia canonico: in questo caso, infatti, detta ω la struttura simplettica ottenuta restringendo la struttura di Poisson di M alla foglia (e quindi $\omega^\# = -(\pi|_S)^\#$) abbiamo che

$$\frac{d}{dt}\Phi_t^* \omega = \Phi_t^* \mathcal{L}_X \omega = 0$$

e quindi $\Phi_t^*\omega = \omega$. In generale questo non sarà vero.

Teorema 4.1.8 *Un campo vettoriale X su M è simplettico se e solo se il suo flusso è determinato da una famiglia di diffeomorfismi locali delle foglie simplettiche.*

Da ultimo trattiamo una caratterizzazione geometrica dei tensori simplettici su una varietà di Poisson regolare che coinvolge il concetto di connessione: precisamente consideriamo una connessione nel fibrato tangente a M

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \Omega^1(M) \otimes \mathfrak{X}(M)$$

Poiché una tale connessione consente di calcolare la derivata covariante di un tensore qualsiasi, possiamo chiederci quando valga la condizione più naturale di compatibilità fra la connessione ∇ e la struttura di Poisson determinata dal tensore di Poisson π:

$$\nabla\pi = 0$$

Il seguente risultato è ben noto

Teorema 4.1.9 *Una varietà di Poisson (M, π) ammette una connessione ∇ senza torsione tale che $\nabla\pi = 0$ se e solo se è regolare.*

cfr. [102, §2.20], [39, §5.7]. Ad esempio nel caso simplettico ritroviamo il concetto di connessione simplettica (cfr. [39, §2.5]).

Dunque, se M è una varietà di Poisson regolare, possiamo supporre che una tale connessione esista; dato che la mappa

$$\pi^\# : \Omega^1(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

è un morfismo di fibrati (che ha rango costante) l'immagine $\mathfrak{S}(M)$ è una distribuzione le cui foglie integrali sono esattamente le foglie simplettiche.

Poiché ∇ è una connessione che rende parallelo il tensore di Poisson, se X è un campo simplettico allora

$$\nabla X = \nabla\pi^\#\omega = 0$$

Viceversa, se X è parallelo allora la sua restrizione ad una foglia definisce un campo sulla foglia, e quindi un campo simplettico.

Notiamo che la condizione

$$\nabla\pi = 0$$

sembra essere l'unica compatibilità fra una connessione e una struttura di Poisson, e quindi parrebbe che le uniche strutture di Poisson compatibili con le connessioni siano quelle regolari, che in effetti sono G-strutture.

Localmente questa condizione si scrive come segue: fissiamo un sistema di coordinate $(x^1, ..., x^n)$ e dunque le relative basi dei campi di vettori $(\partial_1, ..., \partial_n)$ e delle forme differenziali $(dx^1, ..., dx^n)$; se

$$\pi = \pi^{ij}\partial_i \wedge \partial_j$$

(usiamo la convenzione di Einstein sugli indici) e

$$\nabla\partial_i = \Gamma_{ij}^k \partial_k \otimes dx^j$$

allora

$$\begin{aligned}
\nabla\pi &= \pi^{ij}\nabla(\partial_i \wedge \partial_j) + \partial_i \wedge \partial_j \otimes d\pi^{ij} \\
&= \pi^{ij}\left(\nabla\partial_i \wedge \partial_j + \partial_i \wedge \nabla\partial_j\right) + \partial_k\pi^{ij}\partial_i \wedge \partial_j \otimes dx^k \\
&= \pi^{ij}\Gamma_{ir}^s\partial_s \wedge \partial_j \otimes dx^r + \pi^{ij}\Gamma_{jr}^s\partial_i \wedge \partial_s \otimes dx^r + \partial_k\pi^{ij}\partial_i \wedge \partial_j \otimes dx^k
\end{aligned}$$

e con un cambiamento nei nomi degli indici

$$= \pi^{hj}\Gamma_{hk}^i\partial_i \wedge \partial_j \otimes dx^k + \pi^{ih}\Gamma_{hk}^j\partial_i \wedge \partial_j \otimes dx^k + \partial_k\pi^{ij}\partial_i \wedge \partial_j \otimes dx^k$$

Quindi la condizione $\nabla\pi = 0$ equivale alle equazioni locali

$$\partial_k\pi^{ij} = \pi^{jh}\Gamma_{hk}^i - \pi^{ih}\Gamma_{hk}^j$$

Incidentalmente questo dimostra il teorema precedente: infatti una varietà di Poisson è regolare se e solo se esistono sempre delle coordinate nelle quali il tensore di Poisson è costante, col che le equazioni $\nabla\pi = 0$ divengono

$$\pi^{jh}\Gamma_{hk}^i = \pi^{ih}\Gamma_{hk}^j$$

ma queste si soddisfano facilmente tenendo conto che, nelle coordinate di Darboux–Weinstein scelte

$$i = 1, ..., r \qquad \pi^{i,i+r} = 1 \quad \text{e} \quad \pi^{i+r,i} = -1$$

e tutte le altre componenti sono nulle ($2r$ è il rango della struttura di Poisson nell'intorno scelto). Quindi possiamo sempre determinare dei simboli di Christoffel Γ_{ij}^k che soddisfino le equazioni precedenti: basta considerare una connessione simplettica nella parte simplettica dell'intorno e una qualsiasi connessione senza torsione nella parte non simplettica.

Poiché la condizione $\nabla\pi = 0$ è troppo restrittiva in generale (costringe cioè la varietà di Poisson alla regolarità) possiamo provare a indebolirla: una generalizzazione naturale sembra la richiesta che il tensore doppio $\nabla\pi$ sia un cociclo rispetto al cobordo della coomologia di Poisson:

$$d_\pi \nabla\pi = 0$$

cioè che $[\pi, \nabla\pi] = 0$.

Scriviamo localmente questa condizione usando la banalizzazione del fibrato e la matrice delle 1-forme associata alla connessione:

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k$$

Avevamo già dedotto una formula per $\nabla\pi$ che nel contesto delle derivate covarianti si legge come

$$\nabla_{\partial_k}\pi = \left(2\pi^{hj}\Gamma_{hk}^i + \partial_k \pi^{ij}\right) \partial_i \wedge \partial_j$$

Dunque, se poniamo $A_k^{ij} = 2\pi^{hj}\Gamma_{hk}^i + \partial_k\pi^{ij}$:

$$\begin{aligned}
[\pi, \nabla_{\partial_k}\pi] &= [\pi, A_k^{ij}\partial_i \wedge \partial_j] = [\pi, A_k^{ij}] \wedge \partial_i \wedge \partial_j + A_k^{ij}[\pi, \partial_i \wedge \partial_j] \\
&= -X_{A_k^{ij}} \wedge \partial_i \wedge \partial_j + A_k^{ij}[\pi, \partial_i] \wedge \partial_j - A_k^{ij}\partial_i \wedge [\pi, \partial_j]
\end{aligned}$$

(si rammenti che $X_f = d_\pi f = -[\pi, f]$). Ora calcoliamo

$$\begin{aligned}
[\pi, \partial_i] &= [\pi^{rs}\partial_r \wedge \partial_s, \partial_i] = \pi^{rs}[\partial_r \wedge \partial_s, \partial_i] + [\partial_i, \pi^{rs}]\partial_r \wedge \partial_s \\
&= [\partial_i, \pi^{rs}]\partial_r \wedge \partial_s = \partial_i\pi^{rs}\partial_r \wedge \partial_s
\end{aligned}$$

(i campi ∂_i e ∂_j commutano localmente). Combinando queste equazioni si ottiene

$$\begin{aligned}
[\pi, \nabla_{\partial_k}\pi] &= -X_{A_k^{ij}} \wedge \partial_i \wedge \partial_j + A_k^{ij}\partial_i\pi^{rs}\partial_r \wedge \partial_s \wedge \partial_j - A_k^{ij}\partial_j\pi^{rs}\partial_i \wedge \partial_r \wedge \partial_s \\
&= \pi^{sr}\partial_r A_k^{ij}\partial_s \wedge \partial_i \wedge \partial_j + A_k^{ij}\partial_i\pi^{rs}\partial_r \wedge \partial_s \wedge \partial_j - A_k^{ij}\partial_j\pi^{rs}\partial_i \wedge \partial_r \wedge \partial_s \\
&= \pi^{sr}\partial_r A_k^{ij}\partial_i \wedge \partial_j \wedge \partial_s + A_k^{rs}\partial_r\pi^{ij}\partial_i \wedge \partial_j \wedge \partial_s - A_k^{sr}\partial_r\pi^{ij}\partial_i \wedge \partial_j \wedge \partial_s
\end{aligned}$$

Quindi la nostra condizione equivale alle equazioni locali

$$\pi^{sr}\partial_r A_k^{ij} = A_k^{sr}\partial_r\pi^{ij} - A_k^{rs}\partial_r\pi^{ij}$$

4.2 Fibrati di Poisson

Vogliamo ora dare degli esempi geometrici degli oggetti algebrici introdotti nel capitolo precedente: lavoriamo cioè nella categoria dei moduli su un'algebra di Poisson del tipo $A = C^\infty(M)$ ove M è una varietà di Poisson; consideriamo per questo i moduli delle sezioni (infinitamente differenziabili) dei fibrati vettoriali su M.

Cominciamo considerando il concetto di modulo di Poisson: sia $E \longrightarrow M$ un fibrato vettoriale su M e $\Gamma(E)$ il suo modulo delle sezioni globali: su di esso esiste una struttura di modulo di Poisson se è data una azione di Lie

$$\{\,\} : C^\infty(M) \times \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$$

tale che ($f, g \in C^\infty(M)$ e $s \in \Gamma(E)$)

$$\{f, gs\} = g\{f, s\} + \{f, g\}s$$

Se $(U; x_1, ..., x_n)$ è una carta locale di M nella quale il fibrato E si banalizza, possiamo considerare una $C^\infty(U)$-base del modulo delle sezioni locali $(e_1, ..., e_n)$, col che

$$\{f, e_i\} = \sum_j G^{ij}(f) e_j$$

ove $G^{ij} \in C^\infty(U)$ sono operatori lineari: infatti la $\{af + bg, e\} = a\{f, e\} + b\{g, e\}$ implica che $G^{ij}(af + bg) = aG^{ij}(f) + bG^{ij}(g)$, ove $f, g \in C^\infty(U)$ e $a, b \in \operatorname{Cas} U$.

Proposizione 4.2.1 *La matrice di funzioni G definisce una struttura di modulo di Poisson se e solo se*

$$G^{ij}(\{f, g\}) = [G(g), G(f)]^{ij} + \{G^{ij}(f), g\} + \{f, G^{ij}(g)\}$$

(A^{ij} è l'elemento di riga i e colonna j nella matrice A).

Dimostrazione: Basterà notare che (usiamo la convenzione di Einstein sugli indici)

$$\begin{aligned}\{f, \{g, e_i\}\} &= \{f, G^{ij}(g) e_j\} = G^{ij}(g)\{f, e_j\} + \{f, G^{ij}(g)\} e_j \\ &= G^{ij}(g) G^{jk}(f) e_k + \{f, G^{ij}(g)\} e_j\end{aligned}$$

col che

$$\{\{f, g\}, e_i\} = \{f, \{g, e_i\}\} - \{g, \{f, e_i\}\}$$

equivale alla condizione dell'enunciato.

QED

Ancor più semplice è la verifica della

Proposizione 4.2.2 *La matrice di funzioni G definisce una struttura di modulo di moltiplicativo se e solo se G^{ij} sono operatori differenziali del prim'ordine (cioè campi di vettori in $\mathfrak{X}(U)$).*

DIMOSTRAZIONE: Infatti la moltiplicatività della struttura di modulo sulle sezioni di E si legge localmente come

$$G^{ij}(fg)e_j = \{fg, e_i\} = f\{g, e_i\} + g\{f, e_i\} = fG^{ij}(g)e_j + gG^{ij}(f)e_j$$

da cui $G^{ij} \in \operatorname{Der} C^\infty(U)$ risultano essere campi di vettori.

QED

Esempio 4.2.3 Se $E = TM$ con la struttura di Poisson

$$\{f, X\} = [X_f, X]$$

troviamo facilmente che

$$G^{ij}(f) = -\frac{\partial \pi_{rj}}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_r} - \pi_{rj}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_r}$$

dove π_{ij} sono le componenti del tensore di Poisson nelle coordinate locali fissate.

Esempio 4.2.4 Nel caso simplettico, rispetto alle coordinate locali canoniche $(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)$ troviamo

$$G^{ij}(f) = (-1)^\sigma \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_\alpha}$$

ove $(x_1, ..., x_{2n}) = (q_1, ..., p_n)$, α è l'indice $1 + n + j$ modulo $n + 1$ e il segno σ è negativo se $i, \alpha < n$.

Esempio 4.2.5 Se $E = T^*M$ con la struttura di Poisson

$$\{f, \omega\} = \mathcal{L}_{X_f}\omega$$

abbiamo, localmente,

$$G^{ij}(f) = \frac{\partial \pi_{ki}}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_k} + \pi_{ki}\frac{\partial^2 f}{\partial x_k x_j}$$

dato che $\mathcal{L}_{X_f} dx_i = d\{f, x_i\}$.

Un cambiamento di coordinate locali si riflette sulla matrice di operatori G^{ij} nel modo seguente: supponiamo che $(V; y_1, ..., y_n)$ sia un'altra carta locale e consideriamo $U \cap V$ supponendolo non vuoto: qui abbiamo le nostre G^{ij} associate alla banalizzazione del fibrato E nelle coordinate $(U; x)$; si passa da questa alla banalizzazione nelle coordinate (V, y) per mezzo della formula di cociclo che infatti caratterizza i fibrati vettoriali, che in notazione matriciale si esprime come

$$e^V = C_U^V e^U$$

ove $e^U = (e_1, ..., e_n)$ è base del modulo $\Gamma(U \cap V, E)$ nelle coordinate (U, x), e^V è la base nelle coordinate (V, y) e $C_U^V : U \cap V \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ è il cociclo del fibrato (possiamo considerare le componenti C_i^j di questa matrice come funzioni differenziabili su $U \cap V$). In termini di componenti:

$$e_i^V = C_i^j e_j^U$$

Allora

$$\begin{aligned} G_V^{ij}(f) e_j^V &= \{f, e_i^V\} = \{f, C_i^j e_j^U\} = C_i^j \{f, e_j^U\} + \{f, C_i^j\} e_j^U \\ &= C_i^j G_U^{jk}(f) e_k^U + \{f, C_i^j\} e_j^U \end{aligned}$$

cioè

$$G_V^{ij}(f) C_j^k e_k^U = C_i^j G_U^{jk}(f) e_k^U + \{f, C_i^j\} e_j^U$$

In termini matriciali $(C_U^V = (C_V^U)^{-1})$, sicché abbiamo dimostrato la

Proposizione 4.2.6 $G_V(f) = C_U^V G_U(f) C_V^U + \{f, C_U^V\} C_V^U$.

Dunque la formula di trasformazione della matrice G non è tensoriale, per la presenza del secondo addendo (in effetti se si potesse ridurre il gruppo strutturale del fibrato in modo che i coefficienti delle matrici del cociclo fossero funzioni di Casimir avremmo un comportamento tensoriale delle $G(f)$). Tuttavia poiché il termine che impedisce la tensorialità di G non dipende che dal cociclo otteniamo

Corollario 4.2.7 *La differenza di due strutture di modulo di Poisson è un endomorfismo del fibrato E.*

Notiamo che, in generale, queste "costanti di struttura per l'azione di modulo di Poisson potranno essere operatori $\mathbb{R}$-lineari qualsiasi (soddisfacenti alla condizione 4.2.1) del tipo

$$G^{ij} : C^\infty(U) \longrightarrow C^\infty(U)$$

Un caso particolare è ad esempio $G^{ij} \in \mathrm{Can}(U)$ (campi di vettori canonici): allora, per la proposizione 4.2.1 l'unica condizione da imporre alla matrice G affinché definisca una struttura di modulo di Poisson è la

$$[G(f), G(g)] = 0$$

e, dato che gli operatori G^{ij} sono derivazioni, la struttura di modulo è necessariamente moltiplicativa.

Notiamo che possiamo scrivere una più specializzata matrice di funzioni valutando le G^{ij} nelle funzioni coordinate x_k e ottenendo in tal modo le n^3 funzioni

$$G_k^{ij} = G^{ij}(x_k)$$

in termini delle quali la condizione 4.2.1 diviene

$$G^{ij}(\pi_{rs}) = [G_s, G_r]^{ij} + \pi_{rk}\frac{\partial G_s^{ij}}{\partial x_k} + \pi_{sk}\frac{\partial G_r^{ij}}{\partial x_k}$$

In ogni caso queste non sono le componenti di alcun tensore: ciò si vede dagli esempi precedenti 2.3. e 2.5: nel primo esempio $E = TM$ troviamo facilmente che

$$G^{ij}(f) = -\frac{\partial \pi_{rj}}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_r} - \pi_{rj}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_r}$$

dove π_{ij} sono le componenti del tensore di Poisson nelle coordinate locali fissate, e quindi

$$G_k^{ij} = -\frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_k}$$

In particolare, se M è regolare, possiamo sempre trovare delle coordinate locali nelle quali $G_k^{ij} = 0$; in generale la matrice G_k si decomporrà in somma diretta di una matrice nulla e di una matrice qualsiasi soddisfacente alla condizione scritta, secondo il teorema di spezzamento di Weinstein.

Nel secondo esempio $E = T^*M$ di nuovo otteniamo le derivate delle componenti del tensore di Poisson

$$G_k^{ij} = \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_k}$$

Consideriamo ora una rappresentazione di Poisson definita sul modulo E: ricordiamo che una rappresentazione è una struttura $[\,]$ di $\Omega^1(M)$-modulo di Lie su $\Gamma(E)$ tale che

$$[\omega, ae] = a[\omega, e] - i_{X_a}\omega e$$

Localmente scriviamo

$$[\omega, e_i] = H^{ij}(\omega)e_j$$

ove $H^{ij} : \Omega^1(U) \longrightarrow C^\infty(U)$. La definizione di rappresentazione diviene quindi

$$H^{ij}(\{\omega,\varphi\}) = [H(\varphi), H(\omega)]^{ij} + i_{X_{H^{ij}(\omega)}}\varphi - i_{X_{H^{ij}(\varphi)}}\omega$$

cioè, valutando sulle forme esatte $\{dx_i\}$ che localmente generano i differenziali:

$$\begin{aligned} H^{ij}(d\pi_{rs}) &= [H_s, H_r]^{ij} + \{H_r^{ij}, x_s\} + \{x_r, H_s^{ij}\} \\ &= [H_s, H_r]^{ij} + \pi_{ks}\frac{\partial H_r^{ij}}{\partial x_k} + \pi_{rk}\frac{\partial H_s^{ij}}{\partial x_k} \end{aligned}$$

ove $H_k^{ij} = H^{ij}(dx_k)$.

Come già sappiamo una rappresentazione induce un modulo, e confrontando questa equazione con quella data per le G_k^{ij} troviamo che il legame fra la rappresentazione ed il modulo di Poisson da essa indotto è semplicemente

$$G^{ij} = H^{ij} \circ d$$

Inoltre è evidente che la rappresentazione è moltiplicativa se e solo se le $H^{ij}\ \Omega(U) \longrightarrow C^\infty(U)$ sono $C^\infty(U)$-lineari, ed in questo caso anche le G^{ij} indotte dalle H^{ij} danno luogo ad un modulo moltiplicativo:

$$\begin{aligned} G^{ij}(fg) &= H^{ij}(d(fg)) = H^{ij}(fdg) + H^{ij}(gdf) = fH^{ij}(dg) + gH^{ij}(df) \\ &= fG^{ij}(g) + gG^{ij}(f) \end{aligned}$$

Anche per le rappresentazioni possiamo scrivere una formula del cambiamento di coordinate in termini del cociclo del fibrato vettoriale, che ribadisce il carattere non tensoriale degli operatori H^{ij}: di nuovo si procede considerando due carte locali (U,x) e (V,y) che banalizzino il fibrato e i cui supporti abbiano intersezione non vuota, e le relative basi del modulo delle sezioni e^U ed e^V nelle carte scelte. Allora

$$\begin{aligned} H_V^{ij}(\omega)e_j^V &= [\omega, e_i^V] = [\omega, C_i^j e_j^U] = C_i^j[\omega, e_j^U] - i_{X_{C_i^j}}\omega e_j^U \\ &= C_i^j H_U^{jk}(\omega)e_k - i_{X_{C_i^j}}\omega e_j^U \end{aligned}$$

da cui

$$H_V(\omega) = C_U^V H_U(\omega) C_V^U - i_{X_{C_U^V}}\omega C_V^U$$

Ora supponiamo che la nostra rappresentazione di Poisson sul fibrato $E \longrightarrow M$ sia moltiplicativa:

$$[a\omega, e] = a[\omega, e]$$

il che, localmente, significa che le mappe $H^{ij} : \Omega^1(U) \longrightarrow C^\infty(U)$ sono $C^\infty(U)$-lineari; dunque corrispondono a campi di vettori X^{ij} in U e quindi la rappresentazione è localmente determinata da una matrice di campi di vettori che soddisfano l'equazione

$$i_{X^{ij}}\{\omega,\varphi\} = [X(\varphi), V(\omega)]^{ij} + i_{\pi\#_\omega} di_{X^{ij}}\varphi - i_{\pi\#_\varphi} di_{X^{ij}}\omega$$

Quindi la rappresentazione di Poisson moltiplicativa equivale alla scelta in ogni sistema di coordinate di una matrice di campi di vettori che soddisfi l'equazione precedente: se consideriamo allora le funzioni

$$X_k^{ij} = X^{ij}(x_k)$$

(che poi corrispondono alle G_k^{ij} indotte dalle H_k^{ij}) possiamo definire per mezzo di esse un operatore

$$\nabla e_i = X_k^{ij} dx_k \otimes e_j$$

La formula di trasformazione di coordinate per questo oggetto segue da quella per le H^{ij} ed è la seguente

$$X_V = C_V^U X_U C_U^V - (\pi^\# dC_V^U) C_U^V$$

Teorema 4.2.8 X_k^{ij} *sono i simboli di Christoffel di una connessione hamiltoniana.*

L'idea della dimostrazione è ovviamente di confrontare le formule da noi ottenute con quelle note che caratterizzano i simboli di Christoffel di una connessione (cfr. e.g. [53, Vol.I, §III-7.3]). In effetti una connessione hamiltoniana è un operatore

$$\nabla : \Gamma(E) \longrightarrow \mathfrak{G}(M) \otimes \Gamma(E)$$

tale che ($f \in C^\infty(M)$, $e \in \Gamma(E)$)

$$\nabla(fe) = f\nabla e + X_f \otimes e$$

Localmente una tale connessione si scrive come

$$\nabla e_i = \Gamma_{ij}^k X_{x_k} \otimes e_j$$

Se ora consideriamo due banalizzazioni $(U; x)$ e $(V; y)$ del fibrato E i cui supporti abbiano intersezione non vuota $U \cap V$ possiamo scrivere la formula di cambiamento di coordinate per i simboli di Christoffel applicando l'equazione che pone in relazione due basi di sezioni nelle coordinate scelte

$$e_i^V = C_i^j e_j^U$$

Ora effettuiamo questo cambiamento di base nella connessione hamiltoniana

$$\nabla e_i^V = C_i^j \nabla e_j^U + X_{C_i^j} e_j^U = C_i^j \Gamma_{jk}^l X_{x_l} \otimes e_k^U + X_{C_i^j} \otimes e_j^U$$

e quindi, se $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ sono i simboli di Christoffel nelle coordinate (V, y) abbiamo

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k C_j^l X_{x_k} \otimes e_l^U = C_i^h \Gamma_{hl}^k X_{x_k} \otimes e_l^U + X_{C_i^l} \otimes e_l^U$$

cioè

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = C_i^h \Gamma_{hl}^k C_l^j + X_{C_i^l} C_l^j$$

In una forma matriciale, priva di indici:

$$\Gamma^V = C_V^U \Gamma^U C_U^V + (\pi^\# dC_V^U) C_U^V$$

Questa è la formula del cambiamento di coordinate dei simboli di Christoffel di una connessione hamiltoniana: visibilmente è la stessa formula che verificano le funzioni X_k^{ij} associate alla rappresentazione di Poisson moltiplicativa.

Abbiamo cioè una caratterizzazione delle rappresentazioni indotte da connessioni hamiltoniane:

Teorema 4.2.9 *Una rappresentazione di Poisson è indotta da una connessione hamiltoniana se e solo se è regolare e moltiplicativa.*

Infatti in tal caso le funzioni H^{ij} sono determinate dalle H_k^{ij} come

$$H^{ij}(\sum_k a_k dx_k) = \sum_k a_k H_k^{ij}$$

come segue dalla moltiplicatività della rappresentazione.

Ora consideriamo una connessione in E, cioè un operatore

$$\nabla : \Gamma(E) \longrightarrow \Omega^1(M) \otimes \Gamma(E)$$

che soddisfi all'identità di Leibniz

$$\nabla(fe) = f\nabla e + df \otimes e$$

Localmente, fissata una base del modulo delle sezioni, possiamo scrivere i simboli di Christoffel di questa connessione come

$$\nabla e_i = \Gamma_{ij}^k dx_k \otimes e_j$$

e la sua curvatura è il tensore (cfr. §II-3)

$$\begin{aligned}\nabla^2 e_i &= \nabla\Gamma_{ij}^k dx_k \otimes e_j = \Gamma_{ij}^k dx_k \wedge \nabla e_j - d(\Gamma_{ij}^k dx_k) \otimes e_j \\ &= \Gamma_{ij}^k dx_k \wedge \Gamma_{jr}^s dx_s \otimes e_r - d\Gamma_{ir}^k \wedge dx_k \otimes e_r\end{aligned}$$

Se ∇ è una tale connessione, possiamo utilizzare il morfismo di moduli

$$\pi^\# : \Omega^1(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

per definire

$$\Delta : \Gamma(E) \longrightarrow \mathfrak{X}(M) \otimes \Gamma(E)$$

come ($\mathbf{I}$ è l'identità $\Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$)

$$\Delta = \pi^\# \otimes \mathbf{I} \circ \nabla$$

Si noti che, essendo $\pi^\#$ definito anche per le potenze esterne di questi moduli (cfr. §II-4), ha senso considerare anche la mappa $\Delta^2 = \pi^\# \otimes \mathbf{I} \circ \nabla^2$, che, usando l'equazione di struttura locale appena richiamata, si scrive localmente come

$$\begin{aligned}\Delta^2 e_i &= \pi^\#(\Gamma_{ij}^k dx_k \wedge \Gamma_{jr}^s dx_s - d\Gamma_{ir}^k \wedge dx_k) \otimes e_r \\ &= (\Gamma_{ij}^k X_{x_k} \wedge \Gamma_{jr}^s X_{x_s} - X_{\Gamma_{ir}^k} \wedge X_{x_k}) \otimes e_r\end{aligned}$$

La Δ è una connessione hamiltoniana, dato che

$$\Delta a e = \pi^\# \otimes \mathbf{I}(a\nabla e) + \pi^\# \otimes \mathbf{I}(da \otimes e) = a\pi^\# \otimes \mathbf{I}\nabla e + X_a \otimes e = a\Delta e + X_a \otimes e$$

Abbiamo cioè un modo canonico per costruire connessioni hamiltoniane (e quindi rappresentazioni e moduli di Poisson) a partire dalle usuali connessioni nel fibrato E.

Consideriamo viceversa una connessione hamiltoniana $\Delta : \Gamma(E) \longrightarrow \mathfrak{S}(M) \otimes \Gamma(E)$: se

$$\sigma : \mathfrak{S}(M) \longrightarrow \Omega^1(M)$$

è inversa sinistra della mappa $\pi^\#$ (cioè $\sigma\pi^\# =$identità) allora

$$\nabla := \sigma \otimes \mathbf{I} \circ \Delta$$

è una connessione: infatti

$$\nabla a e = \sigma \otimes \mathbf{I}(a\Delta e) + \sigma \otimes \mathbf{I}(X_a \otimes e) = a\nabla e + \sigma\pi^\# da \otimes e = a\nabla e + da \otimes e$$

Ovviamente se la connessione hamiltoniana è della forma $\pi^\# \otimes \mathbf{I}\nabla$ allora la sua connessione associata è ∇ stessa, sicché una stessa connessione può dar luogo a più connessioni hamiltoniane, e l'insieme di tali connessioni hamiltoniane è parametrizzato dalle inverse sinistre del morfismo di moduli $\pi^\#$.

Poiché si tratta di una mappa di moduli, σ è determinata completamente sui campi hamiltoniani, come

$$\sigma X_f = \sigma\pi^\# df = df$$

Cioè è un morfismo di moduli differenziali, secondo la definizione del §II-2. Inoltre

$$\sigma[X_f, X_g] = \sigma X_{\{f,g\}} = d\{f,g\} = \{df, dg\}$$

dunque

Teorema 4.2.10 *Esiste una mappa biunivoca*

$$\{\text{Connessioni Hamiltoniane}\} \longleftrightarrow \frac{\{\text{Connessioni}\}}{\left\{\begin{array}{c}\sigma : \mathfrak{S}(M) \longrightarrow \Omega(M) \text{ inverse destre di } \pi^\# \\ \text{e morfismi di moduli differenziali}\end{array}\right\}}$$

4.3 Il modulo delle distribuzioni

Sia M una varietà di Poisson e $A = C^\infty(M)$ la sua algebra di Poisson: questa contiene un ideale di Poisson ben noto, vale a dire le funzioni a supporto compatto $C_c^\infty(M)$. Che si tratti di un ideale per la struttura associativa è ovvio dato che $\operatorname{supp} fg \subset \operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} g$; ma l'identità di Leibniz per le parentesi di Poisson implica la medesima conclusione per la struttura di Lie:

$$\operatorname{supp}\{f,g\} \subset \operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} g$$

Notiamo che l'algebra $C_c^\infty(M)$ è un "sotto-oggetto di $C^\infty(M)$ dal punto di vista algebrico ma non da quello topologico, dato che non è un sottospazio chiuso (è denso!): tuttavia si tratta dello spazio giusto nel quale considerare le funzioni "test per le distribuzioni (cfr. [89, §I-2]) delle quali richiamiamo la definizione

Definizione 4.3.1 *Una* distribuzione *su una varietà differenziabile M è un funzionale lineare e continuo sullo spazio vettoriale topologico $C_c^\infty(M)$. L'insieme delle distribuzioni si denota*[2] *con $\mathcal{D}(M)'$ o semplicemente $\mathcal{D}'$.*

[2]Usiamo la notazione di L. Schwartz.

Come ben noto si tratta di uno spazio di Fréchet, del pari degli spazi $C^\infty(M)$ e $C_c^\infty(M)$ con le rispettive topologie localmente convesse (cfr. [89, §III] per la definizione di queste topologie e le sue proprietà fondamentali). È inoltre un modulo sull'algebra associativa $C^\infty(M)$ rispetto all'azione coaggiunta: dunque sembra naturale, nel nostro contesto, definire la parentesi di Poisson fra una funzione $f \in C^\infty(M)$ e una distribuzione $T \in \mathcal{D}(M)'$ come la distribuzione

$$\{f, T\}(\varphi) = T\{f, \varphi\}$$

per ogni $\varphi \in C_c^\infty(M)$.

In questo modo otteniamo ancora una distribuzione, dato che è un funzionale lineare (per bilinearità di $\{\,\}$) e continuo (per continuità degli operatori differenziali rispetto alla topologia di $C^\infty(M)$, cfr. [89, §III-5]); è inoltre ben definita, dato che se $\varphi \in \mathcal{D}(M)$ e $f \in \mathcal{E}(M)$ allora $\{f, \varphi\} \in \mathcal{D}(M)$ (identità di Leibniz), e quindi $\{T, f\} \in \mathcal{D}'$.

Proposizione 4.3.2 *Se M è una varietà di Poisson $\mathcal{D}(M)'$ è un modulo di Poisson moltiplicativo rispetto all'azione coaggiunta.*

DIMOSTRAZIONE: la struttura di modulo associativo e di Lie è data dalle azioni

$$(fT)(\varphi) = T(f\varphi) \qquad \{f, T\}(\varphi) = T(\{\varphi, f\})$$

($T \in \mathcal{D}(M)'$, $f \in C^\infty(M)$ e $\varphi \in C_c^\infty(M)$). Notiamo che queste sono azioni ben poste di $C^\infty(M)$ su $\mathcal{D}(M)'$ (per quanto sopra detto a proposito dei supporti delle funzioni); inoltre, dato che differenziazione e moltiplicazione sono continue nella topologia di $C_c^\infty(M)$, $\{f, T\}$ è effettivamente un elemento di $\mathcal{D}(M)'$ se $f \in C^\infty(M)$ e $T \in \mathcal{D}(M)'$.

Che $\mathcal{D}(M)'$ sia un modulo sull'algebra associativa $C^\infty(M)$ è ben noto (cfr. [89, §V]); mostriamo che si tratta di un modulo di Poisson. Intanto

$$\begin{aligned}\{\{f, g\}, T\}(\varphi) &= T\{\varphi, \{f, g\}\} = T\{\{\varphi, f\}, g\} - T\{\{\varphi, g\}, f\} \\ &= \{g, T\}(\{\varphi, f\}) - \{f, T\}(\{\varphi, g\}) \\ &= (\{f, \{g, T\}\} - \{g, \{f, T\}\})(\varphi)\end{aligned}$$

e quindi è un modulo di Lie; le identità di Leibniz si verificano anch'esse in modo ovvio:

$$\begin{aligned}(\{f, g\}T)(\varphi) = T(\{f, g\}\varphi) &= T(\{f\varphi, g\} - \{\varphi, g\}f) \\ \{g, T\}(f\varphi) &- (fT)(\{\varphi, g\}) \\ &= (f\{g, T\} - \{g, fT\})(\varphi)\end{aligned}$$

La moltiplicatività anche si riduce ad un semplice calcolo che sfrutta il precedente: infatti si ha

$$\begin{aligned}\{fg,T\}(\varphi) &= T(\{\varphi,fg\}) = T(f\{\varphi,g\}) + T(g\{\varphi,f\})\\ &= \{g,fT\}(\varphi) + \{f,gT\}(\varphi)\end{aligned}$$

e dunque, per la precedente identità di Leibniz

$$\begin{aligned}\{fg,T\} &= \{g,fT\} + \{f,gT\} = f\{g,T\} - \{f,g\}T + g\{f,T\} - \{g,f\}T\\ &= f\{g,T\} + g\{f,T\}\end{aligned}$$

cioè l'identità moltiplicativa per il modulo di Poisson $\mathcal{D}(M)'$.

QED

Notiamo che ha anche senso scrivere una "identità antisimmetrica sul modulo $\mathcal{D}'$:

$$\{f,T\}(\varphi) + \{\varphi,T\}(f) = 0$$

Inoltre si osservi che $\mathcal{D}'$ contiene come sottospazio denso lo spazio delle distribuzioni a supporto compatto (cfr. [89, §III-7]) che sono precisamente gli elementi del duale topologico $C^\infty(M)'$, classicamente denotato con $\mathcal{E}(M)'$ o semplicemente $\mathcal{E}'$.

Su una varietà di Poisson orientata, non solo abbiamo la distribuzione regolare (cfr. [89, §I])

$$T_f(\varphi) = \int_M \varphi f$$

indotta da $f \in \mathcal{E}(M)$, ma anche una distribuzione "hamiltoniana

$$X_f(\varphi) = \int_M \{f,\varphi\}$$

tale che

$$\{f,T_g\} + \{g,T_f\} = X_{fg}$$

come segue dall'identità di Leibniz per le funzioni. Inoltre

$$X_{\{f,g\}} = \{g,X_f\} - \{f,X_g\}$$

per l'identità di Jacobi per le funzioni, e queste due distribuzioni sono legate dalla

$$\begin{aligned}T_{\{f,g\}}(\varphi) &= \int_M \{f,g\}\varphi = \int_M \{f,g\varphi\} - \int_M \{f,\varphi\}g\\ &= X_f(g\varphi) - T_g\{f,\varphi\} = (gX_f - \{f,T_g\})(\varphi)\end{aligned}$$

sicché, avendosi $T_{\{f,g\}} + T_{\{g,f\}} = 0$, si trova

$$\begin{aligned} fX_g + gX_f &= T_{\{g,f\}} + \{T_f, g\} + T_{\{f,g\}} + \{T_g, f\} = X_{fg} \\ &= \{f, T_g\} + \{g, T_f\} \end{aligned}$$

Si noti che, se M è simplettica, l'elemento di volume è la massima potenza esterna della forma simplettica ω (a meno di normalizzazioni, cfr. [?, §5.1]), e abbiamo, per il teorema di Stokes, che

$$\begin{aligned} X_f(\varphi) &= \int_M \{f,\varphi\}\omega^n = \int_M \mathrm{div}(\varphi X_f)\omega^n \\ &= \int_M \mathcal{L}_{\varphi X_f}\omega^n = \int_M d i_{\varphi X_f}\omega^n \\ &= \int_{\partial M} \varphi i_{X_f}\omega^n \end{aligned}$$

(dato che $d\omega = 0$ e $\mathcal{L}_{X_f}\omega = 0$ perché X_f è hamiltoniano e *a fortiori* canonico). Dunque

Proposizione 4.3.3 *Se la varietà simplettica è senza bordo la distribuzione X_f è identicamente nulla.*

Questo risultato va interpretato come una condizione di invarianza rispetto alle parentesi di Poisson del prodotto scalare dello spazio di Hilbert $L^2(M, \omega^n)$; il non annullarsi di queste distribuzioni è dunque una misura della non simpletticità della varietà di Poisson (orientata e senza bordo) M. Questo, in effetti, sembra un buon momento per evidenziare una analogia fra varietà di Poisson e algebre di Lie, e che riassumiamo nel seguente schema:

Varietà di Poisson	Algebre di Lie
Varietà simplettiche connesse	Algebre semplici
Varietà simplettiche	Algebre semisemplici
Varietà di Poisson regolari	Algebre riduttive
Varietà di Poisson nulle	Algebre abeliane

Come esempio di questa analogia osserviamo che le varietà simplettiche posseggono una "forma di Killing non degenere che è esattamente il prodotto scalare

$$\langle f, g\rangle = \int_M fg$$

sulle funzioni a supporto compatto: infatti l'identità di Leibniz e la proposizione precedente implicano

$$\langle \{f,g\}, h\rangle = \int_M \{f,g\}h = \int_M \{fh, g\} - \int_M \{h,g\}f = \langle f, \{g,h\}\rangle$$

Sempre in vista di questa analogia osserviamo che una varietà simplettica è unione delle sue componenti connesse così come un'algebra semisemplice è somma diretta di algebre semplici.

La struttura di modulo di Poisson su $\mathcal{D}'$ si può anche scrivere in termini dell'azione di un operatore differenziale D sulle distribuzioni,

$$(DT)(\varphi) = (-1)^d T(D\varphi)$$

ove d è l'ordine dell'operatore differenziale, considerando $D = X_f$ (campo hamiltoniano di hamiltoniana f):

$$\{f, T\} = X_f T$$

Notiamo inoltre che non è possibile definire una struttura di Lie su $\mathcal{D}'$ per gli stessi motivi per i quali non è possibile definirne una associativa (cfr. [89, §V-1]).

Vogliamo ora considerare un notevole sottomodulo di $\mathcal{D}'$ i cui elementi possiamo definire come segue:

Definizione 4.3.4 *Una* distribuzione di Casimir *su una varietà di Poisson M è una distribuzione $T \in \mathcal{D}(M)'$ tale che*

$$\forall f \in C^\infty(M) \qquad \{f, T\} = 0$$

Lo spazio delle distribuzioni di Casimir si denota con $\mathcal{C}(M)'$.

Dunque una distribuzione T è di Casimir se $T\{\varphi, f\} = 0$ per ogni $f \in C^\infty(M)$ e per ogni $\varphi \in C_c^\infty(M)$. Abbiamo usato questa terminologia guidati dal seguente esempio: se la varietà di Poisson M è orientata[3] (ad esempio se è simplettica) esiste una immersione (con immagine densa)

$$T : C^\infty(M) \longrightarrow \mathcal{D}(M)'$$

che alla funzione $f \in C^\infty(M)$ associa la distribuzione

$$T_f(\varphi) = \int_M f\varphi$$

Allora

[3] In realtà questo non è indispensabile, se si ricorre al concetto di forma (e corrente) pari e dispari: per una discussione di questi dettagli tecnici cfr. [88, §1] e [89, §IX-2].

Proposizione 4.3.5 *Se $c \in \operatorname{Cas} M$ è una funzione di Casimir allora $T_c \in \mathcal{C}(M)'$.*

DIMOSTRAZIONE: Sia $c \in \operatorname{Cas} M$: scelte arbitrariamente $f \in C^\infty(M)$ e $\varphi \in C_c^\infty(M)$ abbiamo che

$$\{f, T_c\}(\varphi) = \int_M c\{\varphi, f\} = \int_M \{\varphi, cf\}$$

Vogliamo mostrare che la distribuzione $\{f, T_c\}$ è nulla, e basta farlo localmente in ciascun intorno U (per il principio di localizzazione, cfr. [89, §III-8]); dato che siamo su una varietà di Poisson possiamo assumere che l'intorno sia del tipo $U = S \times N$ con S simplettica; allora

$$\int_U \{\varphi, cf\} = \int_N \int_S \{\varphi|_S, cf|_S\}|_S$$

per il teorema di Fubini, che è lecito applicare in quanto $\{\varphi, cf\} \in C_c^\infty(U)$ (la misura che consideriamo su S è ovviamente quella data dalla forma simplettica); rammentiamo inoltre che il valore della parentesi di Poisson in un punto x di due funzioni è esattamente il valore della parentesi di Poisson simplettica sulla foglia S_x passante per x delle funzioni ristrette a tale foglia. Ma

$$\int_S \{\varphi|_S, cf|_S\} = 0$$

perché l'integrale su una varietà simplettica dell'immagine di un campo hamiltoniano di hamiltoniana a supporto compatto è zero (proposizione 4.3.3).

QED

La struttura del modulo delle distribuzioni di Casimir è tanto più complessa quanto più la struttura di Poisson si allontana dall'essere simplettica: ad esempio nel caso limite (seppur banale) di una varietà di Poisson nulla, $\mathcal{C}' = \mathcal{D}'$ (ogni distribuzione è di Casimir).

Proposizione 4.3.6 *Se M è simplettica allora $\mathcal{C}(M)'$ è lo spazio delle distribuzioni localmente costanti.*

DIMOSTRAZIONE: Poiché M è simplettica possiamo globalmente definire l'immersione densa $f \mapsto T_f$ di $C^\infty(M)$ in $\mathcal{D}(M)'$, per mezzo dell'integrale rispetto alla misura di Liouville (cfr. [**?**, §5.1]) indotta dalla forma simplettica[4] su M.

[4]Solitamente, se ω è la forma simplettica, si normalizza tale misura a $(-1)^{[n/2]}\omega^n/n!$ ove $2n$ è la dimensione della varietà.

Dunque ha senso parlare di distribuzioni localmente costanti, come di quelle associate a funzioni localmente costanti su M: per semplicità supporremo M connessa. Ora sia $T \in \mathcal{C}(M)'$ una distribuzione di Casimir: vogliamo dimostrare che è della forma T_k per qualche costante $k \in \mathbb{R}$. Di nuovo usiamo il principio di localizzazione per le distribuzioni: per dimostrare che due distribuzioni coincidono basta ragionare localmente; possiamo dunque supporre che $M = \mathbb{R}^{2n}$ con la struttura simplettica canonica e quindi coordinate $(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)$. Allora

$$0 = \{f, T\}(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} T\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}\right) - \sum_{i=1}^{n} T\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial \varphi}{\partial p_i}\right)$$

per ogni $f \in C^\infty(M)$ e $\varphi \in C_c^\infty(M)$. Se ne deduce, ad esempio ponendo $f = q_1, ..., p_n$, che, per ogni $\varphi \in C_c^\infty(M)$:

$$T\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_i}\right) = T\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_j}\right) = 0$$

per $i, j = 1, ..., n$. Ma allora la distribuzione T è costante (cfr. [89, §II-6]) e quindi della forma

$$T(\varphi) = k \int \varphi$$

QED

Si noti che una qualsiasi costante dà luogo ad una distribuzione di Casimir, dato che (proposizione 4.3.3)

$$\int \{\varphi, f\} = 0$$

su una varietà simplettica, se $\varphi \in C_c^\infty(M)$ e $f \in C^\infty(M)$ (integrando rispetto alla misura indotta dalla forma simplettica).

Dunque le distribuzioni di Casimir, sulle varietà simplettiche, non forniscono nulla di nuovo rispetto alle funzioni di Casimir: non è così sulle varietà di Poisson qualsiasi.

Esempio 4.3.7 Consideriamo il piano simplettico "puntato $\mathbb{R}_0^2$ con le parentesi

$$\{f, g\}_0(x, y) = (x^2 + y^2)\{f, g\}$$

(ove $\{f, g\} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\right)$ sono le usuali parentesi simplettiche). Ovviamente le funzioni di Casimir si riducono alle costanti, esattamente come nel caso del piano simplettico; tuttavia, mentre $\mathcal{C}(\mathbb{R}^2)' = \mathbb{R}$, esistono delle distribuzioni di Casimir non costanti su $\mathbb{R}_0^2$: è infatti evidente che una distribuzione con supporto nel punto singolare sarà un buon candidato. Ad esempio la distribuzione di Dirac δ_0 concentrata nell'origine è di Casimir, dato che[5]

$$\delta(\{\varphi, f\}_0) = \{\varphi, f\}_0(0) = 0$$

Anche le sue derivate prime sono distribuzioni di Casimir: ad esempio

$$\frac{\partial\delta_0}{\partial x}(\{\varphi, f\}_0) = -\left(2x\{\varphi, f\} + (x^2+y^2)\frac{\partial\{\varphi, f\}}{\partial x}\right)\Bigg|_0 = 0$$

come pure la sua derivata mista $\partial^2\delta_0/\partial x\partial y$. Notiamo tuttavia che

$$\frac{\partial^2\delta_0}{\partial x^2}(\{\varphi, f\}_0) = \left(2\{\varphi, f\} + 2xF(x,y) + (x^2+y^2)\frac{\partial^2\{\varphi, f\}}{\partial x^2}\right)\Bigg|_0 = 2\{\varphi, f\}(0)$$

che non è zero in generale. In definitiva $\mathcal{C}(M)' = \mathbb{R}^5$ ha per generatori 1, δ_0, $(\delta_0)_x$, $(\delta_0)_y$, $(\delta_0)_{xy}$.

Ovviamente la struttura di $\mathcal{C}'$ dipende pesantemente dal tensore di Poisson: se consideriamo su $\mathbb{R}^2$ una struttura di Poisson

$$\{f, g\}_\pi(x,y) = \pi(x,y)\{f, g\}$$

ove $\pi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ è nulla nell'origine otteniamo una varietà di Poisson con le stesse foglie simplettiche di $\mathbb{R}^2_0$ ma che può avere anche infinite distribuzioni di Casimir indipendenti: ad esempio basterà considerare una funzione nel nucleo di Borel, con tutte le derivate nulle in 0 per avere che l'intero spazio delle distribuzioni con supporto nell'origine[6] è contenuto in $\mathcal{C}'$.

In generale lo studio delle distribuzioni di Casimir per le strutture di Poisson nel piano dovrebbe essere collegato alla classificazione stessa di queste strutture: infatti le foglie simplettiche per una tale struttura possono solo essere singoli punti oppure insiemi aperti connessi, e gli unici punti singolari per la struttura di Poisson, cioè quelli intorno ai quali il rango può crescere, saltare cioè da zero a due, sono esattamente quelli in cui la struttura di Poisson si annulla; le distribuzioni di Casimir, che riescono a "vedere questi punti altrimenti invisibili usando solo le funzioni, dovrebbero dunque fornire gli invarianti necessari ad una classificazione delle strutture di Poisson nel piano: una simile classificazione sostanzialmente esiste ed è dovuta ad Arnol'd[7].

Vogliamo considerare qualche altro esempio di distribuzione di Casimir:

[5] Rammentiamo che $(DT)(\varphi) = (-1)^d T(D\varphi)$ ove D è un operatore differenziale di ordine d.

[6] Lo spazio di tali distribuzioni è lo spazio vettoriale generato da δ_0 e da tutte le sue derivate, cfr. [89, §III-10].

[7] Viene enunciata in appendice ad [5], sebbene una dimostrazione completa non sia stata pubblicata se non in certe irreperibili dispense.

Teorema 4.3.8 *Se M e N sono varietà di Poisson allora*

$$\mathcal{C}(M \times N)' \cong \mathcal{C}(M)' \otimes \mathcal{C}(N)'$$

(prodotto tensoriale topologico fra spazi nucleari)

Dimostrazione: Per prima cosa notiamo che l'enunciato ha perfettamente senso: infatti lo spazio $\mathcal{C}(M)'$ è un sottospazio di $\mathcal{D}(M)'$, dunque si tratta di uno spazio vettoriale topologico nucleare (cfr. [89, §IV-4]) e il prodotto tensoriale ha senso e in modo unico.

Conviene qui ragionare a livello di algebre di Fréchet, visto che per esse il prodotto tensoriale è univocamente definito: la struttura di Poisson sull'algebra $C^\infty(M \times N) \cong C^\infty(M) \otimes C^\infty(N)$ (cfr. [101, p.531]) è data dalle parentesi

$$\{f_1 \otimes g_1, f_2 \otimes g_2\} = \{f_1, f_2\}_M \otimes g_1 g_2 + f_1 f_2 \otimes \{g_1, g_2\}_N$$

Per il teorema del nucleo di Schwartz (cfr. [101, p.531]), $\mathcal{D}(M \times N)' \cong \mathcal{D}(M)' \otimes \mathcal{D}(N)'$, e

$$\begin{aligned}
\{T \otimes S, f \otimes g\}(\varphi \otimes \psi) &= T \otimes S\{f \otimes g, \varphi \otimes \psi\} \\
&= T \otimes S\left(\{f, \varphi\}_M \otimes g\psi + f\varphi \otimes \{g, \psi\}_N\right) \\
&= T(\{f, \varphi\}_M) S(g\psi) + T(f\varphi) S(\{g, \psi\}_N) \\
&= (\{T, f\}_M \otimes gS)(\varphi \otimes \psi) + (fT \otimes \{S, g\}_N)(\varphi \otimes \psi)
\end{aligned}$$

Questo significa che se $C \in \mathcal{C}(M)'$ e $D \in \mathcal{C}(N)'$ allora $C \otimes D \in \mathcal{C}(M \times N)'$; viceversa, sia $C \in \mathcal{C}(M \times N)'$: per il già ricordato teorema del nucleo questa distribuzione è combinazione lineare di elementi della forma $T_i \otimes S_i$, sicché, per ogni f, g, φ, ψ (negli opportuni spazi):

$$\begin{aligned}
0 &= \{C, f \otimes g\}(\varphi \otimes \psi) = C\{f \otimes g, \varphi \otimes \psi\} \\
&= \sum_i a_i T_i \{f, \varphi\}_M S_i(g\psi) + \sum_i a_i T_i(f\varphi) S_i \{g, \psi\}_N
\end{aligned}$$

Le funzioni in queste equazioni sono arbitrariamente scelte, dunque (ad esempio considerando f costante):

$$0 = \sum_i a_i f T_i(\varphi) S_i \{g, \psi\}_N$$

Quindi, per arbitrarietà di φ, $\{S_i, g\}_N = 0$. Analogamente si ottiene $\{T_i, f\}_M = 0$, e dunque $C \in \mathcal{C}(M)' \otimes \mathcal{C}(N)'$.

QED

Esempio 4.3.9 Se S è simplettica (e connessa): $\mathcal{C}(S\times N)' \cong \mathcal{C}(N)'$; in particolare, se N è una varietà di Poisson nulla, abbiamo che $\mathcal{C}(S\times N)' \cong \mathcal{D}(N)'$ e se N è compatta $\mathcal{C}(S\times N)' \cong \mathcal{E}(N)$ è il duale topologico dello spazio $\mathrm{Cas}(S\times N)$.

Quando la struttura di Poisson è regolare, una funzione di Casimir c è, in un intorno locale di Darboux–Weinstein $U = S\times N$, costante lungo il fattore S, e quindi se X è un campo vettoriale tangente a S abbiamo $Xc = 0$ (le parentesi su N sono identicamente nulle per regolarità); dunque possiamo identificare questa distribuzione con una funzione su $C^\infty(N)$:

Teorema 4.3.10 *Se M è una varietà di Poisson regolare allora $\mathcal{C}(M)' \cong$ $\mathrm{Cas}(M)'$ (duale topologico dello spazio delle distribuzioni di Casimir).*

DIMOSTRAZIONE: Se M è regolare e $T \in \mathcal{C}(M)'$, cioè $\{T, f\} = 0$ per ogni $f \in \mathcal{D}(M)$, allora, in ciascuna carta locale U, abbiamo $\{T, f\}|_U = 0$, vale a dire

$$0 = \{T, f\}(\varphi) = \sum_{i=1}^r T\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial \varphi}{\partial q_i}\right) - \sum_{i=1}^r T\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial \varphi}{\partial p_i}\right)$$

ove $r \leq n$ è il rango della varietà M: questo segue dal teorema di spezzamento di Weinstein (cfr. §I-3.2) che, nel caso regolare, afferma che la struttura di Poisson è, localmente, prodotto di una struttura simplettica e di una struttura nulla. Per conseguenza una distribuzione di Casimir è, in una qualsiasi carta di Darboux–Weinstein $U = S\times N$, una distribuzione della forma $k_S \otimes T_N$ ove k_S è una costante e $T_N \in \mathcal{D}(N)'$. Se $c \in \mathrm{Cas}(M)$ allora possiamo calcolarvi un funzionale $\tilde{T}$ come

$$\tilde{T}(c) = \sum_U T(\psi_U c) = \sum_{U=S\times N} k_S T_N(c|_N)$$

ove $\{\psi_U\}$ è una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $\{U = S \times N\}$, essendo $c|_N$ una funzione che dipende soltanto dalle coordinate del fattore N. Abbiamo quindi una mappa $\tilde{}: \mathcal{C}(M)' \longrightarrow \mathrm{Cas}(M)'$ che è iniettiva dato che $\tilde{T} = 0$ se e solo se ogni T_N è zero, sicché T è zero, e suriettiva poiché un funzionale $\gamma \in \mathrm{Cas}(M)'$ è indotto da una distribuzione che localmente è definita come $T_U = 1 \otimes \gamma|_U$ (la restrizione $\gamma|_U$ definisce una distribuzione su N in quanto $\mathrm{Cas}(U) = C^\infty(N)$).

QED

Esempio 4.3.11 Si consideri la varietà di Poisson $M = \mathfrak{so}(3)^* \setminus \{0\}$, cioè la varietà di Lie–Poisson dell'algebra di Lie $\mathfrak{so}(3)$ privata dell'origine; si tratta di una varietà di Poisson regolare le cui foglie sono le sfere concentriche S_r di raggio $r > 0$ e centro nell'origine. Una distribuzione di Casimir è una distribuzione $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \setminus 0)$ tale che

$$0 = T\{f, \varphi\} = T(\nabla f \wedge \nabla\varphi)$$

ove ∇ denota il gradiente e $\wedge$ il prodotto vettoriale. Più precisamente, in coordinate cartesiane:

$$T\{f, \varphi\} = T(x(f_y\varphi_z - f_z\varphi_y) + y(f_z\varphi_x - f_x\varphi_z) + z(f_x\varphi_y - f_y\varphi_x))$$

($f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ e così via) sicché la condizione $T\{f, \varphi\} = 0$ implica

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial T}{\partial y} = y\dfrac{\partial T}{\partial x} \\ y\dfrac{\partial T}{\partial z} = z\dfrac{\partial T}{\partial y} \\ z\dfrac{\partial T}{\partial x} = x\dfrac{\partial T}{\partial z} \end{cases}$$

Ma dato che $(x, y, z) \neq 0$, una distribuzione di Casimir è determinata non appena una delle sue derivate parziali non identicamente nulle sia data (se tutte le derivate parziali fossero nulle la distribuzione sarebbe l'integrale per una funzione costante). Ciò significa che lo spazio di tali distribuzioni è lo spazio delle distribuzioni le cui derivate nelle direzioni tangenti alle foglie siano zero: si tratterà dunque dei funzionali lineari e continui su uno spazio di dimensione uno (dipendente da un parametro che non è altri se non la distanza dall'origine nelle coordinate polari di $\mathbb{R}^3$), e che infatti si può identificare con $C^\infty(\mathbb{R}_+)'$, il duale dello spazio delle funzioni di Casimir, in accordo col teorema precedente.

Si noti che, considerando l'intera varietà di Lie–Poisson $\mathfrak{so}(3)^*$ avremmo almeno una distribuzione che non proviene da alcun funzionale sullo spazio delle funzioni di Casimir: la misura di Dirac concentrata nell'origine (non a caso punto singolare della varietà di Poisson in questione). Dunque, in questo caso, ogni funzione di Casimir induce una distribuzione di Casimir ma non è vero il viceversa (di nuovo in accordo col teorema).

In generale, una distribuzione il cui supporto sia un punto singolare di rango nullo è di Casimir; ad esempio si consideri una struttura di Poisson nel piano $\mathbb{R}^2_\pi$ con parentesi

$$\{f, g\}(x, y) = \pi(x, y)\{f, g\}_S(x, y)$$

ove $\{\ \}_S$ sono le usuali parentesi simplettiche e π è una funzione differenziabile. Allora una distribuzione di Casimir T è tale che

$$\forall f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)\ \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) \quad 0 = T(\pi\{f, \varphi\}_S) = (\pi T)\{f, \varphi\}_S$$

e quindi πT è costante. È questo il caso, ad esempio, se $\operatorname{supp}\pi \cap \operatorname{supp} T = \emptyset$, come, in particolare, per $T = \delta_0$ e $\pi(0,0) = 0$; si noti che non ogni distribuzione con supporto nell'origine è di Casimir, a meno che π non appartenga al nucleo di Borel, cioè tutte le sue derivate nell'origine siano nulle.

Esempio 4.3.12 Consideriamo $\mathbb{R}^2$ con le parentesi indotte dalla funzione $\pi = y^2$: allora non solo le misure di Dirac concentrate nei punti singolari (cioè quelli della retta $\{y = 0\}$) sono delle distribuzioni di Casimir (così come le loro derivate rispetto alla x di ordine arbitrariamente elevato), ma se consideriamo una qualsiasi distribuzione $R \in \mathcal{D}(\mathbb{R})'$ sulla retta $\{y = 0\}$ e la estendiamo a $\mathbb{R}^2$ come $T(\varphi) = R(\varphi \circ i)$ (con $i(x) = (x, 0)$) allora ovviamente $T \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)'$, sicché abbiamo una inclusione $\mathcal{D}(\mathbb{R})' \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)'$.

Esempio 4.3.13 Una varietà di Lie–Poisson $\mathfrak{g}^*$ possiede almeno un punto di rango nullo, vale a dire l'origine: dunque ammette certamente delle distribuzioni di Casimir, che avranno supporto in 0. Se scriviamo in coordinate la struttura di Lie–Poisson come
$$\pi = \sum_{i,j} \sum_k c_{ij}^k x_k \partial_i \wedge \partial_j$$
Allora una distribuzione T è di Casimir se e solo se
$$\sum_{i,j,k} T(c_{ij}^k x_k \partial_i f \partial_j \varphi) = 0$$
per ogni $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dunque
$$0 = \sum_{i,j,k} c_{ij}^k x_k T(\partial_i f \partial_j \varphi)$$
Ovviamente la δ_0 è di Casimir: non lo sono invece le sue derivate prime
$$\partial_h \delta_0\{f, \varphi\} = \partial_h\{f, \varphi\}(0) = \sum_{i,j} c_{ij}^h \partial_i f(0) \partial_j \varphi(0)$$
né, *a fortiori*, quelle successive.

Capitolo 5

Integrazione sulle varietà di Poisson

Il calcolo differenziale sulle varietà di Poisson, da noi delineato per le algebre nel capitolo II, fornisce invarianti analoghi a quelli usuali (differenziali, derivate di Lie, coomologie) per lo studio delle strutture di Poisson; una notevole differenza, tuttavia, col caso del calcolo differenziale usuale è la mancanza di una teoria dell'integrazione: ci proponiamo qui di colmare questa lacuna introducendo i concetti necessari ad un "calcolo integrale di Poisson, compatibilmente col calcolo differenziale fin qui sviluppato. Per cominciare introduciamo la coomologia simplettica come coomologia di Poisson del modulo dei tensori simplettici; poi consideriamo una teoria simplettica dell'omologia singolare e, per mezzo di questa, diamo la definizione di integrale simplettico; infine gettiamo le fondamenta della teoria astratta della misura soggiacente al nostro concetto di integrale.

5.1 Coomologia simplettica

Abbiamo fin qui considerato i moduli di Poisson $\mathcal{C}(M)' \subset \mathcal{D}(M)'$ su una varietà di Poisson M: su una varietà orientata molte (in un certo senso quasi tutte) distribuzioni sono regolari, vale a dire si ottengono per integrazione come

$$\varphi \mapsto \int_M \varphi d\nu$$

ove $d\nu$ è una densità positiva (ad esempio una forma di volume nel caso orientabile). Se la varietà M è simplettica abbiamo un modo naturale (che dipende solo dalla struttura di Poisson) per definire queste distribuzioni, a partire dalla forma di volume indotta dalla forma simplettica; in generale questo non è possibile coi metodi usuali: vogliamo ora introdurre un concetto di integrale sulle varietà di Poisson che estenda l'usuale integrazione di forme su una varietà orientabile, e che ci consenta di esprimere in modo completo questi importanti esempi di distribuzioni.

Osserviamo che $\mathfrak{S}(M)$ non solo è un'algebra associativa graduata (rispetto alle usuali operazioni vettoriali e al prodotto $\wedge$ di tensori antisimmetrici) ma una DG algebra rispetto al differenziale usuale per i tensori controvarianti su una varietà di Poisson introdotto da Lichnerowicz (cfr. [64]) e da noi definito nel §II-4 direttamente sulle algebre di Poisson; poiché è definito in termini delle parentesi di Schouten dobbiamo preliminarmente verificare la compatibilità di questa operazione con la simpletticità dei tensori da noi considerati.

Proposizione 5.1.1 *Se $P \in \mathfrak{S}^p(M)$ e $Q \in \mathfrak{S}^q(M)$ allora $[P,Q] \in \mathfrak{S}^{p+q-1}(M)$ (parentesi di Schouten).*

Dimostrazione: Utilizziamo la formula di Nijenhuis (che avevamo dimostrato nel §II-4) per le parentesi di Schouten: precisamente

$$(*) \qquad i_{[P,Q]}\alpha = (-1)^{q(p+1)} i_P d i_Q \alpha + (-1)^p i_Q d i_P \alpha - i_{P\wedge Q}\alpha$$

Ora, per ipotesi e per il lemma §4.1.6, P e Q sono tali che $i_S^*\alpha = 0$ se allora $i_P\alpha = i_Q\alpha = 0$ (ove $i_S : S \longrightarrow M$ è una foglia simplettica fissata e $\alpha \in \Omega^1(M)$ una forma differenziale). Per avere la nostra tesi basterà mostrare che anche $i_{[P,Q]}\alpha = 0$. Ma

$$i_P d i_Q \alpha = 0 \qquad \text{e} \qquad i_Q d i_P \alpha = 0$$

Inoltre

$$i_{P\wedge Q}\alpha = i_P i_Q \alpha = 0$$

e quindi, per la (*), $i_{[P,Q]}\alpha = 0$.

QED

In particolare, per il lemma §4.1.5, $[\pi, P]$ è ancora un tensore simplettico, se lo è P. Allora, per l'identità di Jacobi graduata relativa alle parentesi di Schouten, la mappa

$$d_\pi P = -[\pi, P]$$

definisce un differenziale nell'algebra graduata dei tensori simplettici. Abbiamo cioè un complesso

$$0 \longrightarrow C^\infty(M) \xrightarrow{d_\pi} \mathfrak{S}(M) \xrightarrow{d_\pi} \mathfrak{S}^2(M) \xrightarrow{d_\pi} \cdots \xrightarrow{d_\pi} \mathfrak{S}^n(M) \longrightarrow 0$$

sulla varietà di Poisson M.

Ovviamente questo complesso non è l'usuale complesso che calcola la coomologia di Poisson della varietà, ma solo un suo sotto-complesso: la sua coomologia, che denoteremo con $H_S(M)$ verrà detta *coomologia simplettica* della varietà di Poisson M; naturalmente se P è un cociclo simplettico dà anche luogo ad una classe di coomologia di Poisson e quindi abbiamo una mappa

$$H_S(M) \longrightarrow H_\pi(M)$$

dove, seguendo la notazione usuale, abbiamo denotato con H_π la coomologia di Poisson della varietà. Questa mappa in generale non è iniettiva: infatti possono esistere cocicli simplettici (che in particolare sono cocicli per la coomologia di Poisson) che danno luogo a classi di coomologia non banali in $H_S(M)$ ma per i quali esistono cobordi di Poisson che banalizzano i corrispondenti elementi di $H_\pi(M)$. Inoltre, dato che un cociclo di Poisson può non essere simplettico come tensore, questo morfismo di algebre (differenziali graduate) non è in generale nemmeno suriettivo.

Scriviamo esplicitamente il differenziale d_π calcolandone il valore su un tensore simplettico P contratto su una forma differenziale $\omega_0 \wedge ... \wedge \omega_p$, utilizzando la formula data al §II-4.

$$\begin{aligned}\langle d_\pi P, \omega_0 \wedge ... \wedge \omega_p \rangle = & \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \pi(\omega_i, d i_P \omega_1 \wedge ... \wedge \widehat{\omega_i} \wedge ... \wedge \omega_p) + \\ & + \sum_{i<j}^{0...p} (-1)^{i+j} \langle P, \{\omega_i, \omega_j\} \wedge ... \wedge \widehat{\omega_i} \wedge ... \widehat{\omega_j} \wedge ... \wedge \omega_p \rangle\end{aligned}$$

Esempio. $H^0_S(M)$ di una varietà di Poisson è esattamente lo spazio delle funzioni di Casimir: infatti si tratta delle funzioni $f \in C^\infty(M)$ tali che $0 = d_\pi f = -[\pi, f] = -X_f$ che equivale a $f \in \operatorname{Cas} M$.

Esempio. $H^1_S(M)$ di una varietà di Poisson è l'algebra di Lie quoziente dell'algebra dei campi simplettici canonici modulo quelli hamiltoniani:

$$H^1_S(M) = \frac{(\operatorname{Can} M \cap \mathfrak{S}(M))}{\operatorname{Ham} M}$$

Infatti è per definizione il quoziente degli 1-cicli, cioè dei campi simplettici tali che $[\pi, X] = 0$ modulo i campi simplettici della forma $Y = -[\pi, f] = -X_f$, vale a dire dei campi hamiltoniani. Resta solo da osservare che $[\pi, X] = 0$ equivale alla canonicità, il che è ovvio:

$$\langle [\pi, X], \omega_0 \wedge \omega_1 \rangle = \pi(\omega_0, i_X \omega_1) - \pi(\omega_1, i_X \omega_0) - i_X\{\omega_0, \omega_1\} = 0$$

implica

$$X\{f, g\} = i_X \pi(df, dg) = \pi(df, i_X dg) - \pi(dg, i_X df) = \{f, Xg\} + \{Xf, g\}$$

cioè la canonicità di X.

Si noti che $H^1_S(M)$ è in generale diverso da $H^1_\pi(M)$, perché, come abbiamo osservato, ossono esistere campi canonici non simplettici; il solito esempio della varietà nulla ci offre $H^1_S(M) = 0$ ma $H^1_\pi(M) = \mathfrak{X}(M)$: questo rende conto in modo evidentissimo della diversità fra la coomologia di Poisson e quella simplettica.

Esempio. Dato che $[\pi, \pi] = 0$ (per definizione di tensore di Poisson) π induce una classe di coomologia $[\pi] \in H^2_S(M)$.

In generale la coomologia di Poisson non è funtoriale, nel senso che una mappa di Poisson non induce una mappa in coomologia, se non sotto ipotesi restrittive:

Proposizione 5.1.2 *Una mappa di Poisson $F : M \longrightarrow N$ che sia un diffeomorfismo locale induce un morfismo $F^* : H_\pi(N) \longrightarrow H_\pi(M)$ in coomologia di Poisson.*

DIMOSTRAZIONE: Infatti se F è localmente un diffeomorfismo, la sua mappa tangente in ciascun punto è un isomorfismo di spazi vettoriali, e quindi possiamo assegnare alla classe di coomologia di Poisson $[P] \in H^p_\pi(N)$ la classe generata dal tensore F^*P definito come

$$dF \circ P \circ F : M \longrightarrow \bigwedge^p TM$$

Che questo tensore sia un cociclo per la coomologia di Poisson è facile a vedersi:

$$[\pi^M, F^*P] = [F^*\pi^N, F^*P] = F^*[\pi^N, P] = 0$$

perché $F \in P^\infty(M, N)$ e quindi $dF\pi^M = \pi^N \circ F$ come segue dalla

$$F^*\{f, g\} = \{F^*f, F^*g\}$$

QED

In generale non è possibile effettuare il *push-forward* di un tensore se non con un tensore ad esso relazionato. Secondo la nostra interpretazione, il motivo di ciò ha la sua radice nel poter essere la mappa

$$\pi^\# : \Omega^1(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

non suriettiva: se lo fosse potremmo infatti (a meno di alcune verifiche di buona definizione) chiudere il diagramma

$$\begin{tikzcd} \Omega^1(N) \arrow[r, "F^*"] \arrow[d, "\pi^\#"] & \Omega^1(M) \arrow[d, "\pi^\#"'] \\ \mathfrak{X}(N) & \mathfrak{X}(M) \end{tikzcd}$$

Limitandoci a considerare i tensori simplettici questa possibilità non ci è più preclusa.

Avevamo osservato con degli esempi nel §I-1, che le mappe di Poisson "tendono ad essere sottoimmersioni (mentre quelle simplettiche tendono ad essere immersioni): questa è una ipotesi che include come caso particolare i diffeomorfismi locali e che permette di generalizzare, una volta che si passi dalla coomologia di Poisson alla coomologia simplettica da noi considerata, la proposizione precedente.

Dunque consideriamo la categoria i cui oggetti sono le varietà di Poisson ed i cui morfismi le sottoimmersioni di Poisson fra varietà di Poisson; vogliamo costruire un funtore da questa categoria alla categoria delle algebre differenziali graduate, o più precisamente, alla categoria di algebre differenziali graduate formata dai complessi dei tensori simplettici su una varietà di Poisson.

Consideriamo una varietà di Poisson M: per definizione l'algebra $\mathcal{E} = C^\infty(M)$ è un'algebra di Poisson; anche la sottoalgebra $\mathcal{D} = C_c^\infty(M)$ delle funzioni a supporto compatto è un'algebra di Poisson, infatti è un ideale per la struttura associativa, dato che $\operatorname{supp} fg \subset \operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} g$; ma l'identità di Leibniz per le parentesi di Poisson implica la medesima conclusione per la struttura di Lie:

$$\operatorname{supp}\{f,g\} \subset \operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} g$$

Dunque $\mathcal{D}$ è pure un'algebra di Poisson.

Consideriamo ora due varietà di Poisson M e N, e lo spazio $P^\infty(M,N) \subset C^\infty(M,N)$ delle funzioni differenziabili di Poisson, cioè delle $F : M \longrightarrow N$ tali che

$$\{F^*f, F^*g\}_M = F^*\{f,g\}_N$$

Le seguenti proprietà sono immediate:

Proposizione 5.1.3 *Se $F \in P^\infty(M,N)$ e $G \in P^\infty(N,P)$ allora $G \circ F \in P^\infty(M,P)$. Se $F \in P^\infty(M,N)$ è suriettiva e $G \circ F \in P^\infty(M,P)$ allora $G \in P^\infty(N,P)$.*

Notiamo tuttavia che, sebbene $F \in P^\infty(M,N)$ preservi le parentesi di Poisson la sua immagine $\operatorname{im} F \subset N$ non è in generale una unione di foglie simplettiche (un *insieme saturo* come si dice in teoria delle fogliazioni, cfr. [85]). In effetti una foglia simplettica è un insieme di punti connessi per cammini da una curva il cui campo tangente, a tratti, sia hamiltoniano; se dunque $F(x) \in \operatorname{im} F$ e $y \in S_{F(x)}$ appartiene alla foglia passante per $F(x)$ possiamo certamente trovare un cammino (per semplicità supponiamo che consista di un sol tratto) il cui campo tangente sia X_h; certamente possiamo sollevare il campo X_h al campo X_{F^*h} su M intorno a x, ma in generale quest'ultimo non sarà un campo completo, nemmeno se X_h lo è, sicché non potremo sollevare l'intera curva da

N a M e quindi non avremo alcuna garanzia che il punto y sia nell'immagine di F.

Questo medesimo ragionamento mostra tuttavia che $\operatorname{im} F$ è unione di sottoinsiemi aperti in foglie simplettiche. Ad esempio se consideriamo l'inclusione $U \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ di un aperto nella varietà simplettica $\mathbb{R}^{2n}$ campi vettoriali completi in $\mathbb{R}^{2n}$ non si solleveranno in generale a campi completi in U.

Queste osservazioni, dovute ad A. Weinstein, ci inducono a formulare la definizione seguente, pure dovutagli (cfr. [17])

Definizione 5.1.4 *Una mappa di Poisson $F : M \longrightarrow N$ è* completa *se per ogni $h \in C^\infty(N)$ l'essere il campo vettoriale X_h completo implica che lo sia anche X_{F^*h}.*

Chiaramente se una mappa è completa possiamo integrare i flussi dei campi hamiltoniani sollevati a M e quindi comporli per ottenere un cammino che congiunga i punti le cui immagini appartengono ad una medesima foglia nell'immagine di N: dunque (rammentando che una foglia è l'insieme dei punti fra loro congiungibili con cammini hamiltoniani a tratti, cfr. I-3.5)

Proposizione 5.1.5 *L'immagine di una mappa di Poisson completa è unione di foglie simplettiche.*

Esempio. Se $F : M \longrightarrow N$ è di Poisson e se il morfismo di algebre associative $F^* : C^\infty(N) \longrightarrow C^\infty(M)$ porta funzioni a supporto compatto in funzioni a supporto compatto allora F è completa.

Esempio. $F : M \longrightarrow \mathbb{R}$ allora è completa se e solo se lo è il campo X_F. Infatti se F è completa allora il campo X_i ove $i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è l'identità, è banale (la struttura di Poisson su $\mathbb{R}$ è l'unica possibile, cioè quella nulla), quindi completo, dunque $X_{F^*i} = X_F$ è completo. Se invece X_F è completo allora, per ogni $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ abbiamo

$$X_{F^*h} = X_{h\circ F} = \pi^\# d(h \circ F) = \pi^\# \left(\frac{dh}{dx} dF\right) = \frac{dh}{dx} X_F$$

Ma la derivata di h composta con F è costante lungo le traiettorie di X_F, sicché X_{F^*h} è un multiplo del campo completo X_F, dunque è completo anch'esso.

Notiamo inoltre che una mappa di Poisson $F \in P^\infty(M, N)$ non preserva le foglie simplettiche: ad esempio se consideriamo la proiezione $\mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dalla varietà simplettica $\mathbb{R}^{2n}$ alla varietà nulla $\mathbb{R}^n$ abbiamo una mappa di Poisson che "diffonde l'unica foglia simplettica di $\mathbb{R}^{2n}$ nelle foglie simplettiche di $\mathbb{R}^n$, vale a dire nei suoi punti.

Definizione 5.1.6 *Una funzione $F \in C^\infty(M,N)$ si dice* funzione simplettica *se l'immagine di una foglia simplettica di S per tramite di F è contenuta in una foglia simplettica di N. Denotiamo con $S^\infty(M,N)$ lo spazio delle funzioni simplettiche.*

Ad esempio, se S è simplettica e M è qualsiasi allora $S^\infty(S,M)$ è l'insieme delle funzioni costanti, cioè si identifica con M, mentre $S^\infty(M,S) = C^\infty(M,S)$; se invece M è qualsiasi e N è nulla, $S^\infty(N,M) = C^\infty(N,M)$, mentre $S^\infty(M,N)$ è costituito dalle funzioni che sono costanti sulle foglie simplettiche: in particolare

Proposizione 5.1.7 $S^\infty(M,\mathbb{R}) = \operatorname{Cas} M$.

Questo mostra come la classe delle funzioni simplettiche è assai più ristretta della classe delle funzioni di Poisson: per rimediare all'assenza di funtorialità della coomologia di Poisson avremmo teoricamente due vie possibili: cambiare l'anello delle funzioni, ad esempio restringerci a quelle simplettiche, o cambiare il complesso di cocatene che calcola la coomologia di Poisson: scegliamo qui un compromesso fra queste due possibilità.

Consideriamo di nuovo una funzione di Poisson $F \in P^\infty(M,N)$ fra due varietà di Poisson M e N:

$$\{F^*f, F^*g\}_M = F^*\{f,g\}_N$$

Abbiamo visto che in generale non preserva le foglie simplettiche: comunque preserva i loro spazi tangenti, che è quel che ci basta, perché qui ci interessano i campi simplettici.

In effetti possiamo parafrasare questa relazione in termini di campi hamiltoniani: per ogni $f \in C^\infty(N)$ i campi X_f e X_{F^*f} sono in F-relazione

$$X_f = F^* X_{F^*f}$$

ovvero in termini dell'operatore $\pi^\# : T^*M \longrightarrow TM$ come

$$\pi^{N\#}_{F(x)} = (dF)_x \pi^{M\#}_x F^*_{F(x)}$$

In particolare

Lemma 5.1.8 *Se $x \in M$ allora lo spazio H_xM (immagine della distribuzione singolare dei campi hamiltoniani) ha come immagine, per tramite di $dF : TM \longrightarrow TN$, un sottospazio di $H_{F(x)}N$.*

In altre parole i vettori generati dai vettori hamiltoniani in un punto sono mandati in vettori hamiltoniani nell'immagine di quel punto.

Corollario 5.1.9 *Se $F \in P^\infty(M, N)$ allora*

$$\operatorname{rango}_x M \geq \operatorname{rango}_{F(x)} N$$

ove $\operatorname{rango}_x M$ *è il rango del punto $x \in M$.*

DIMOSTRAZIONE: Basta osservare che l'immagine di $T_x S_x$ per tramite della mappa dF coincide con $T_{F(x)} S_{F(x)}$; che sia contenuta segue dal lemma. Inoltre se $X_{F(x)} \in T_{F(x)} S_{F(x)}$ allora è ovvio che esiste un $X_x \in T_x S$ tale che $dF X_x = X_{F(x)}$, dato che possiamo estendere $X_{F(x)}$ ad un campo hamiltoniano intorno a $F(x)$, e quindi ad una immagine, per tramite di dF di un campo hamiltoniano intorno a x.

QED

Ad esempio se il rango di N è massimo:

Corollario 5.1.10 *Se $F \in P^\infty(M, S)$ ove S è simplettica allora F è una sotto-immersione.*

Notiamo infine che

Corollario 5.1.11 *Se $F \in P^\infty(M, N)$ è una sottoimmersione allora lo spazio $H_{F(x)} N$ ($x \in M$) è l'immagine di $H_x M$.*

Questi ultimi due risultati ci spingono a restringere la classe dei morfismi nella nostra categoria alle sottoimmersioni di Poisson, che denotiamo $P_S^\infty(M, N)$.

Sia $F \in P_S^\infty(M, N)$ di Poisson: possiamo, per mezzo di essa, ovviamente effettuare il *pull-back* di un campo hamiltoniano[1] su N di hamiltoniana $h \in C^\infty(N)$:

$$F^* X_h := X_{F^* h}$$

ove $F^* h = h \circ F$ è il *pull-back* della 0-forma h. Estendiamo questa operazione ai campi simplettici per $C^\infty(N)$-linearità come

$$F^* (f X_h) := (F^* f) X_{F^* h}$$

Otteniamo in questo modo una mappa di moduli

$$F^* : \mathfrak{S}(N) \longrightarrow \mathfrak{S}(M)$$

Notiamo che sui campi hamiltoniani abbiamo

$$F^* X_f = X_{F^* f} = \pi^{M\#} dF^* f = \pi^{M\#} F^* df = \pi^{M\#} F^* (\pi^{N\#})^{-1} X_f$$

da cui

[1]Questo è vero per qualsiasi mappa di Poisson.

Proposizione 5.1.12 $F^*X = \pi^{M\#}F^*(\pi^{N\#})^{-1}X$

Usando questa proposizione possiamo dimostrare che la mappa $F^* : \mathfrak{S}(N) \longrightarrow \mathfrak{S}(M)$ è ben definita: in effetti il suo valore su un campo $X \in \operatorname{im}\pi^\#$ si può definire come

$$F^*X = \pi^{M\#}F^*\omega$$

ove $\omega \in \Omega(M)$ è tale che $\pi^{N\#}\omega = X$; ovviamente questo potrebbe dipendere dalla scelta di ω: un'altra forma che si proietti in X è necessariamente del tipo $\omega + \gamma$ ove $\gamma \in \ker\pi^{N\#}$, e quindi basta verificare che

$$\pi^{M\#}F^*\gamma = 0$$

Per vedere se un campo vettoriale è nullo, possiamo provare a mostrare che si annulla su ogni funzione (interpretandolo come derivazione nell'algebra delle funzioni differenziabili): calcoliamo cioè

$$\pi^{M\#}F^*\gamma(f)$$

ove $f \in C^\infty(M)$; allora

$$\begin{aligned}\pi^{M\#}F^*\gamma(f) &= \langle\pi^{M\#}F^*\gamma, df\rangle = -\langle F^*\gamma, \pi^{M\#}df\rangle\\ &= -\langle F^*\gamma, X_f^M\rangle = -\langle\gamma, dF(X_f^M)\rangle\end{aligned}$$

Ora rammentiamo che la mappa F è di Poisson, col che

$$dF\pi^{M\#}F^* = \pi^{N\#}$$

Ma F è una sottoimmersione, quindi possiamo supporre che $f = F^*\varphi$ sia il *pull-back* di una funzione $\varphi \in C^\infty(N)$: abbiamo quindi

$$\begin{aligned}\pi^\#F^*\gamma(f) &= -\langle\gamma, dF(X_f)\rangle = -\langle\gamma, dF(\pi^\# df)\rangle\\ &= -\langle\gamma, dF(\pi^\# dF^*\varphi)\rangle = -\langle\gamma, dF(\pi^\# F^*d\varphi)\rangle\\ &= -\langle\gamma, \pi^\# d\varphi\rangle = \langle\pi^\#\gamma, d\varphi\rangle = 0\end{aligned}$$

Quindi F^*P è ben definita.

Proposizione 5.1.13 *Se $F \in P_S^\infty(M,N)$ allora $F^* : \mathfrak{S}(N) \longrightarrow \mathfrak{S}(M)$ è un morfismo di moduli differenziali.*

DIMOSTRAZIONE: Che si tratti di un morfismo segue dal fatto che una mappa di Poisson induce un morfismo di algebre di Poisson:

$$\begin{aligned}F^*(fX) = F^*\left(f\sum_i f_iX_{h_i}\right) &= \sum_i F^*(ff_i)X_{F^*h_i}\\ &= \sum_i F^*(f)F^*(f_i)X_{F^*h_i} = F^*(f)F^*(X)\end{aligned}$$

Inoltre la $F^*X_f = X_{F^*f}$ significa esattamente che il diagramma

$$\begin{tikzcd} C^\infty(N) \arrow[r, "F^*"] \arrow[d, "d_\pi"] & C^\infty(M) \arrow[d, "d_\pi"'] \\ \mathfrak{S}(N) \arrow[r, "F^*"] & \mathfrak{S}(M) \end{tikzcd}$$

è commutativo.

QED

Definizione 5.1.14 *Il morfismo di moduli $F^* : \mathfrak{S}(N) \longrightarrow \mathfrak{S}(M)$ indotto da una mappa di Poisson si dice* pull-back.

Il motivo di questa terminologia sta nel seguente

Teorema 5.1.15 *Se $X \in \mathfrak{S}(N)$ e $F \in P_S^\infty(M,N)$ allora*

$$dF \circ F^*X = X \circ F$$

DIMOSTRAZIONE: Supponiamo che $X = \sum_i f_i X_{h_i}$ con $f_i, h_i \in C^\infty(N)$:

$$dF \circ F^*X = \sum_i dF \circ f_i X_{h_i} = \sum_i (f_i \circ F) F^* X_{h_i} = \sum_i (f_i \circ F) X_{F^*h_i} = X \circ F$$

QED

Poiché lo spazio dei tensori simplettici è l'algebra esterna sul modulo dei campi simplettici, ponendo

$$F^*(P \wedge Q) := F^*P \wedge F^*Q$$

possiamo estendere il *pull-back* ad una mappa di DG algebre

$$F^* : \mathfrak{S}^\bullet(N) \longrightarrow \mathfrak{S}^\bullet(M)$$

Corollario 5.1.16 *Se P è un tensore simplettico su una varietà di Poisson N e se $F : M \longrightarrow N$ è una mappa di Poisson allora esiste un unico* pull-back *F^*P simplettico su M.*

Mostriamo ora che $\mathfrak{S}$ è un funtore controvariante dalla categoria delle varietà di Poisson alla categoria delle DG algebre.

Proposizione 5.1.17 *Se $F \in P_S^\infty(M,N)$ e $G \in P_S^\infty(N,P)$ allora*

(1) $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$.

(2) *Se* $F = Id : M \longrightarrow M$ *allora* $F^* = Id : \mathfrak{S}(M) \longrightarrow \mathfrak{S}(M)$.

Dimostrazione: La (1) è facile a mostrarsi sui campi hamiltoniani

$$(GF)^* X_h = X_{(GF)^* h} = X_{F^* G^* h} = F^* X_{G^* h} = F^* G^* X_h$$

e, per linearità, sui campi simplettici

$$(GF)^*(fX_h) = (GF)^* f (GF)^* X_h = (F^* G^* f)(F^* G^* X_h) = F^* G^* (f X_h)$$

Se F è l'identità allora $F^* X_h = X_h$ e $F^*(fX_h) = fX_h$ col che F^* pure è l'identità. In ambedue i casi l'estensione ai tensori simplettici qualsiasi segue dalla definizione.

QED

Teorema 5.1.18 *Se* $P \in \mathfrak{S}^p(N)$, $Q \in \mathfrak{S}^q(N)$ *allora*

$$F^*[P, Q] = [F^* P, F^* Q]$$

ove [ ] *sono le parentesi di Schouten.*

Dimostrazione: Per $p = 1$ e $q = 0$ abbiamo

$$F^*[gX_h, f] = F^*(gX_h f) = F^*(g\{f, h\}) = F^* g \{F^* f, F^* h\} = [F^*(gX_h), F^* f]$$

Passiamo ora al caso $p = q = 1$: ovviamente il commutatore di campi hamiltoniani soddisfa la tesi del teorema:

$$\begin{aligned} F^*[X_f, F_g] &= F^* X_{\{f,g\}} = X_{F^*\{f,g\}} \\ &= X_{\{F^* f, F^* g\}} = [X_{F^* f}, X_{F^* g}] \\ &= [F^* X_f, F^* X_g] \end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} F^*[fX_h, X_g] &= F^*(f[X_h, X_g] + \{f, g\} X_h) \\ &= F^* f [F^* X_h, F^* X_g] + F^*\{f, g\} F^* X_h \\ &= F^* f [F^* X_h, F^* X_g] + \{F^* f, F^* g\} F^* X_h \\ &= [F^* f F^* X_h, F^* X_g] \end{aligned}$$

In modo analogo per l'altra variabile, col che la tesi è dimostrata per $p = q = 1$.

Procediamo ora per induzione su q nel caso $p = 1$: per prima cosa rammentiamo la formula (§II-4)

$$[P, R \wedge X] = [P, R] \wedge X + (-1)^{r(p+1)} R \wedge [P, X]$$

quindi decomponiamo Q in $R \wedge X$ (per semplicità supponiamo un solo addendo) con $X \in \mathfrak{S}^1(N)$; allora, per ipotesi induttiva e il caso di grado uno:

$$\begin{aligned} F^*[P, Q] &= F^*[P, R] \wedge F^*X + (-1)^{r(p+1)} F^*R \wedge F^*[P, X] \\ &= [F^*P, F^*R] \wedge F^*X + (-1)^{r(p+1)} F^*R \wedge [F^*P, F^*X] \\ &= [F^*P, F^*R \wedge F^*X] = [F^*P, F^*Q] \end{aligned}$$

Si noti che questo ragionamento funziona per p qualsiasi e quindi il teorema è dimostrato per ogni p, q.

QED

Esempio. Se $F \in P^\infty(M, N)$ e π^M e π^N sono i tensori di Poisson su queste varietà allora $F^*\pi^N = \pi^M$. Infatti abbiamo già notato come

$$\pi^{N\#}_{F(x)} = (dF)_x \pi^{M\#}_x F^*_{F(x)}$$

e questo equivale a $F^*\pi^N = \pi^M$.

La $F^*X_f = X_{F^*f}$ si generalizza nel

Lemma 5.1.19 *Il* pull-back *commuta con il differenziale hamiltoniano.*

DIMOSTRAZIONE: Per definizione dell'operatore d_π, se $P \in \mathfrak{S}^p(N)$:

$$F^* d_{\pi^N} P = -F^*[\pi^N, P] = -[F^*\pi^N, F^*P] = -[\pi^M, F^*P] = d_{\pi^M} F^*P$$

in virtù del teorema e dell'esempio precedenti.

QED

Torniamo ora a considerare la coomologia simplettica:

Teorema 5.1.20 *Una sottoimmersione differenziabile di Poisson $F : M \longrightarrow N$ induce un omomorfismo $F^* : H_S(N) \longrightarrow H_S(M)$.*

DIMOSTRAZIONE: Naturalmente si pone

$$F^*[P] = [F^*P]$$

utilizzando il *pull-back* appena definito; questa definizione è effettivamente ben posta per il lemma, e induce un morfismo di algebre, dato che

$$F^*(P \wedge Q) = F^*P \wedge F^*Q$$

per definizione

QED

Corollario 5.1.21 *Se $F : M \longrightarrow N$ è un diffeomorfismo di Poisson allora $H_S(M) \cong H_S(N)$.*

DIMOSTRAZIONE: Basta comporre F^* con F^{*-1} per ottenere l'isomorfismo voluto.

QED

Osserviamo che una qualsiasi forma differenziale $\alpha \in \Omega(M)$ induce un tensore su M come $\pi^{\#}\alpha$, che è sempre simplettico, dato che appartiene all'immagine di $\pi^{\#}$: se la forma α è chiusa allora $d_\pi \pi^{\#}\alpha = -\pi^{\#}d\alpha = 0$ (cfr. §II-4.7) sicché il tensore corrispondente genera una classe di coomologia simplettica; abbiamo quindi definito un morfismo di algebre differenziali graduate

$$\pi^{\#} : H_{dR}(M) \longrightarrow H_S(M)$$

dalla coomologia di de Rham a quella della varietà. In particolare, dato che se M è simplettica allora $\pi^{\#}$ è un isomorfismo ne deduciamo che

Proposizione 5.1.22 *Se M è una varietà simplettica allora $H_{dR}(M) \cong H_S(M)$.*

Notiamo che la coomologia simplettica contiene ovviamente meno informazioni della coomologia di Poisson usuale: ad esempio il grado massimo di una classe di coomologia è il *rango generico* della varietà di Poisson: ricordiamo che i punti regolari di una varietà di Poisson formano un insieme denso, sul quale il rango è costante: questa costante è precisamente il rango generico della varietà (se si vuole è semplicemente il massimo valore che il rango può assumere).

Ovviamente se M ha rango generico $2r$ nessun tensore $P \in \bigwedge^p TM$ con $p > 2r$ potrà essere simplettico, perché nessuna foglia simplettica "ha abbastanza dimensioni per ospitarne la restrizione; dunque

Proposizione 5.1.23 *Se $2r$ è il rango generico di una varietà di Poisson M allora $H_S^k(M) = 0$ per ogni $k > 2r$.*

Il rango generico va così considerato come la "dimensione di Poisson della varietà, almeno dal punto di vista coomologico.

5.2 Integrazione su catene simplettiche

Vogliamo ora costruire gli oggetti "lungo i quali integrare i tensori simplettici: l'approccio che seguiremo è sulla falsa riga della teoria omologica singolare; precisamente, consideriamo gli spazi $S_p(M)$ delle catene singolari di dimensione p sulla varietà M.

Definizione 5.2.1 *Un* simplesso simplettico *di ordine p è un p-simplesso singolare la cui immagine sia contenuta in una singola foglia simplettica di M; una* catena simplettica *di ordine n è una combinazione lineare*

$$\sum_i a_i c_i$$

di simplessi simplettici a coefficienti reali.

Dunque restringiamo la nostra attenzione non già a tutte le catene singolari, ma solo a quelle le cui immagini siano contenute interamente in una singola foglia simplettica: otteniamo in questo modo un sottocomplesso del complesso singolare su M. Notiamo ora che il bordo di una catena simplettica è ancora una catena simplettica, e quindi possiamo considerare l'*omologia singolare delle foglie*, i cui gruppi denotiamo con $H_n^L(M)$, semplicemente passando all'omologia del complesso delle catene simplettiche rispetto al bordo usuale.

Si noti che *l'omologia delle foglie non è l'omologia relativa rispetto alle foglie simplettiche*: infatti una catena simplettica localizzata in una foglia $S \subset M$ è certamente una catena relativa in (M, S), tuttavia una catena relativa non è necessariamente simplettica, dato che solo il suo bordo deve essere contenuto in S, mentre una catena simplettica deve essere essa stessa interamente contenuta nella foglia S.

Esempio. Se M è simplettica allora le foglie sono esattamente le componenti connesse e quindi i simplessi e le catene simplettiche sono esattamente i simplessi e le catene singolari sullo spazio topologico M: l'omologia delle foglie coincide in questo caso con l'omologia singolare.

Di contro si noti che se la struttura simplettica è nulla allora non vi sono catene simplettiche di ordine positivo (a parte quella nulla) e che le 0-catene coincidono con i singoli punti della varietà: l'omologia delle foglie è quindi nulla in grado positivo, mentre $H_0^L(M)$ è lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^M$ generato dai punti di M.

Teorema 5.2.2 *L'omologia singolare delle foglie $H^L(M)$ coincide con l'omologia singolare (ordinaria) dell'insieme M dotato della topologia generata dagli insiemi $A \cap S$ ove A è un aperto della topologia di M indotta dalla struttura di varietà e S è una foglia simplettica.*

DIMOSTRAZIONE: La topologia descritta nell'enunciato è la *topologia delle foglie* nota in teoria delle fogliazioni: la tesi dell'enunciato è immediata non appena si sia notato che le uniche catene che restano continue rispetto a questa nuova topologia sono esattamente quelle simplettiche: infatti se $s : \Delta^p \longrightarrow M$ è un simplesso simplettico[2] allora $s^{-1}(A\cap S)$ è aperto solo se $\operatorname{im} s \subset S$ perciò $s^{-1}(A \cap S) = s^{-1}(A)$ che è aperto per continuità di s nella topologia di M indotta dalla struttura di varietà.

QED

Notiamo in particolare che nella topologia delle foglie ciascuna foglia è una componente connessa, quindi possiamo scrivere

$$H^L(M) = \oplus_{S\in\tilde{M}} H(S)$$

come somma diretta sull'insieme delle foglie simplettiche di M delle omologie singolari delle singole foglie.

Corollario 5.2.3 *Il numero di Betti* $\dim H_0^L(M)$ *è la cardinalità dell'insieme delle foglie simplettiche.*

Dato che l'omologia delle foglie è esattamente l'omologia singolare rispetto ad una nuova topologia su M, le proprietà funtoriali usuali restano valide, avendo l'accortezza di intendere la continuità nel senso della nuova topologia: ad esempio

Teorema 5.2.4 *Se M e N sono varietà di Poisson, una funzione $F \in P^\infty(M, N)$ induce un omomorfismo $F_* : H^L(M) \longrightarrow H^L(N)$ in omologia; se F è un diffeomorfismo di Poisson allora i gruppi di omologia delle foglie sono isomorfi.*

Notiamo che, così come avevamo osservato per la coomologia simplettica, anche l'omologia delle foglie svanisce in grado superiore al rango generico della varietà di Poisson: in effetti la dimensione dell'insieme M dotato della topologia delle foglie non è costante, a meno che la varietà di Poisson M non sia regolare, e quindi componenti connesse diverse (cioè foglie simplettiche) per questa topologia possono avere dimensioni diverse; il valore massimo di questa dimensione è proprio il rango simplettico della varietà.

Vogliamo ora mostrare come sia possibile integrare un tensore simplettico lungo una catena simplettica. Consideriamo il caso di un simplesso simplettico, potendosi questo estendere al caso generale semplicemente per linearità: sia dunque $c \in S^p(M)$ un simplesso simplettico di ordine p e sia $P \in \mathfrak{S}^p(M)$ un tensore simplettico pure di ordine p; per definizione, l'immagine di c sta in una singola foglia simplettica S, e la restrizione di P ad un qualsiasi punto di

[2] Δ^p rappresenta il simplesso geometrico standard in $\mathbb{R}^p$: a seconda delle definizioni di omologia singolare può considerarsi come un tetraedro, un cubo o un poliedro: questa distinzione è irrilevante ai nostri fini.

S fornisce un elemento di $\mathfrak{X}^p(S)$. Ma S è simplettica rispetto alla restrizione σ della struttura di Poisson di M, per cui possiamo considerare l'isomorfismo $\sigma^\flat : TS \longrightarrow T^*S$ e usarlo per trasformare il tensore $P|_S$ in una forma differenziale di ordine p su S, che possiamo quindi integrare lungo c:

$$\int_c P = \int_c \sigma^\flat(P|_S)$$

Proposizione 5.2.5 *Se $i_S : S \longrightarrow M$ è l'immersione della foglia nella varietà allora*

$$\int_c P = \int_c i_S^*\alpha$$

ove α è una forma differenziale tale che $\pi^\#\alpha = P$.

DIMOSTRAZIONE: Per prima cosa notiamo che una tale α deve esistere per il teorema §4.1.7: si noti che abbiamo esteso la mappa $\pi^\# : T^*M \longrightarrow TM$ ad una mappa $\bigwedge^p T^*M \longrightarrow \bigwedge^p TM$ tenendo conto del segno come

$$\langle \pi^\#\alpha, \omega_1 \wedge ... \wedge \omega_p \rangle = (-1)^p \langle \alpha, \pi^\#\omega_1 \wedge ... \wedge \pi^\#\omega_p \rangle$$

ove $\omega_i \in \Omega^1(M)$.

Per definizione, $\pi^\#\alpha = P$ sicché (per la commutatività del diagramma tracciato nella dimostrazione del teorema §4.1.7)

$$\sigma^\flat((\pi^\#\alpha)|_S) = i_S^*\alpha$$

da cui

$$\int_c P = \int_c \sigma^\flat(P|_S) = \int_c i_S^*\alpha$$

Resta da vedere che questo numero non dipende dalla forma α scelta nell'insieme $\pi^{\#-1}(P)$, il che è ovvio, dato che l'integrale dipende solo dalla restrizione di P e dall'isomorfismo $\sigma^\flat$:

$$\sigma^\flat((\pi^\#\beta)|_S) = \sigma^\flat((\pi^\#\alpha)|_S)$$

QED

Ad esempio, se $X_f = \pi^\# df$ è un campo hamiltoniano in M e $c \subset S$ una 1-catena simplettica allora

$$\int_c X_f = \int_c \sigma^\flat(X_f|_S) = \int_c df|_S = \int_{\partial c} f|_S = f(x_1) - f(x_0)$$

se $\partial c = x_0 + x_1$.

In generale possiamo dare una versione simplettica del teorema di Stokes, che però sarà affetta dall'antisimmetricità tipica dell'ambiente simplettico:

Teorema 5.2.6 $\int_c d_\pi P + \int_{\partial c} P = 0$

Dimostrazione: È una semplice applicazione del teorema di Stokes in omologia singolare:

$$\int_c d_\pi P = \int_c \sigma^\flat d_\pi P|_S = -\int_c d\sigma^\flat P|_S = -\int_{\partial c} \sigma^\flat P|_S = -\int_{\partial c} P$$

QED

Questa antisimmetricità non è eliminabile cambiando le scelte degli isomorfismi locali (ad esempio considerando $-\sigma^\flat$ in luogo di $\sigma^\flat$).

Ovviamente una prima conseguenza del teorema di Stokes è che la mappa

$$\int : S_k^L(M) \times \mathfrak{S}_{sc}^k(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

passa in omologia, inducendo una mappa bilineare

$$B : H_k^L(M) \times H_S^k(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

come

$$B([c],[P]) = \int_c P$$

che è ben definita, dato che se $P' \in [P]$ e $c' \in [c]$:

$$\begin{aligned} B([c'],[P']) &= \int_{c'} P' = \int_{c+\partial b} (P + d_\pi Q) \\ &= \int_c P + \int_c d_\pi Q + \int_{\partial b} P + \int_{\partial b} d_\pi Q \\ &= B([c],[P]) + \int_c d_\pi (Q - P) - \int_b d_\pi^2 Q \\ &= B([c],[P]) \end{aligned}$$

($d_\pi P = d_\pi Q = 0$ e $d_\pi^2 = 0$).

Consideriamo ora un tensore simplettico P su M di grado massimo (dunque $P \in \mathfrak{S}^{2r}(M)$ ove $2r$ è il rango generico della varietà): in ciascuna foglia $S \subset M$ la forma differenziale $\omega = \sigma^\flat P_S$ è nulla (se $\dim S < 2r$) ovvero ha grado massimo; naturalmente la foglia S può non essere compatta (anche se M lo è) e quindi non è detto che sia possibile integrare ω su S.

Definizione 5.2.7 *Un sottoinsieme $N \subset M$ di una varietà di Poisson è* sezionalmente compatto *se per ogni foglia simplettica $S \subset M$ l'intersezione $S \cap N$ è compatta in N.*

Naturalmente su una varietà simplettica compattezza e compattezza sezionale coincidono, mentre su una varietà nulla ogni insieme è sezionalmente compatto.

Si noti che un insieme sezionalmente compatto può non essere compatto e che un insieme compatto può non essere sezionalmente compatto. Ad esempio se consideriamo la struttura di Lie–Poisson su $\mathfrak{so}(3)^*$, le cui foglie sono sfere concentriche di centro l'origine in $\mathbb{R}^3$, una retta per l'origine è un insieme sezionalmente compatto, dato che interseca ciascuna foglia in solo due punti antipodali. Viceversa se consideriamo la struttura di Poisson su $\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ indotta dalla fogliazione ergodica, e consideriamo l'insieme N ottenuto proiettando il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$

$$\{(x,y,z)\,|\,0 \leq x \leq \frac{1}{2},\, 0 \leq x \leq \frac{1}{2},\, 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\}$$

Ovviamente N è compatto in quanto immagine di un compatto, ma la sua intersezione con una foglia S_φ (che è proiezione di un piano passante per l'asse $\{y = z = 0\}$ di $\mathbb{R}^3$ e formante un angolo φ irrazionale con il piano $\{z = 0\}$) è un insieme illimitato sul cilindro S_φ. Questo esempio dipende dal fatto che la topologia su una foglia non è quella indotta da quella di M:

Proposizione 5.2.8 *Se tutte le foglie simplettiche di una varietà di Poisson hanno la topologia indotta allora ogni insieme compatto è sezionalmente compatto.*

La dimostrazione è ovvia: se gli aperti di una qualsiasi foglia S sono esattemente le intersezioni degli aperti di M con S, un ricoprimento di $K \subset M$ induce un ricoprimento di $K \cap S$.

Evidentemente un tensore simplettico è sempre integrabile se il suo supporto è sezionalmente compatto: si noti che *la compattezza sezionale non coincide con la compattezza nella topologia delle foglie*; infatti un insieme con un numero infinito di componenti connesse non può essere compatto e quindi se l'insieme delle foglie non è finito è ben possibile che un insieme sezionalmente compatto non sia compatto nella topologia delle foglie perché, per quanto le sue componenti connesse siano compatte, ne possiede infinite. Invece, come è ovvio, ogni insieme compatto nella topologia delle foglie è sezionalmente compatto.

Notazione 5.2.9 *Denoteremo con $\mathfrak{S}^p_{sc}(M)$ lo spazio dei tensori di ordine p a supporto sezionalmente compatto e con $C^\infty_{sc}(M)$ lo spazio delle funzioni $\mathfrak{S}^0_{sc}(M)$.*

Notiamo ad esempio che un elemento di $C^{\infty 0}_{sc}(M)$ è una funzione $f \in C^\infty(M)$ tale che, per ogni foglia simplettica $S \subset M$, $\operatorname{supp} f \cap S$ sia compatto in S; per la proposizione precedente, su una varietà le cui foglie abbiano la topologia indotta, una funzione a supporto compatto è di questo tipo, ma non è vero il viceversa: se consideriamo su $\mathbb{R}^3$ la struttura di Poisson prodotto $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1$ di una varietà simplettica e una nulla, la funzione $f(x, y, z) = \rho(x, y)$ (ove ρ è una funzione a supporto compatto in $\mathbb{R}^2$) non ha supporto compatto, dato che $\operatorname{supp} f = \operatorname{supp} \rho \times \mathbb{R}^1$, ma la sua restrizione a ciascuna foglia simplettica (cioè a ciascun piano parallelo al piano $\{z = 0\}$) ha supporto compatto, quindi f è a supporto sezionalmente compatto.

Ora possiamo chiaramente integrare un tensore simplettico a supporto sezionalmente compatto su una qualsiasi foglia simplettica, così come potevamo integrare un tensore simplettico lungo una catena singolare simplettica: ovviamente un tensore simplettico a supporto sezionalmente compatto può essere integrato anche su una catena singolare “infinita, cioè su una serie formale nell'insieme dei simplessi singolari simplettici.

Notiamo che le nostre varietà sono senza bordo, in particolare lo sono le foglie simplettiche: se $P \in \mathfrak{S}^{2r}_{cs}(M)$ e S è una foglia simplettica di dimensione $2r$ allora

$$\int_S d_\pi P = 0$$

Questo rende sempre sensata l'integrazione, lungo le foglie simplettiche, dei tensori a supporto sezionalmente compatto e anzi dimostra che l'integrale $\int_S P$ non dipende da P ma solo dalla sua classe di coomologia.

Consideriamo ora lo spazio $\tilde{M}$ delle foglie della varietà, cioè l'insieme $\tilde{M} = \{S_x\}_{x \in M}$ delle sue foglie simplettiche (che chiamiamo “spazio senza una reale giustificazione) e la proiezione canonica

$$M \longrightarrow \tilde{M}$$

Se ora $P \in \mathfrak{S}^{2r}_{sc}(M)$ possiamo definire una funzione $I : \tilde{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ come

$$I_P(S) = \int_S P$$

Otteniamo cioè una mappa che ad un tensore associa una funzione su $\tilde{M}$, una mappa lineare come è ovvio.

Teorema 5.2.10 *Se una varietà di Poisson M non è nulla, lo spazio vettoriale delle funzioni integrali della forma I_P si identifica con l'algebra* $\operatorname{Cas} M$ *delle funzioni di Casimir.*

DIMOSTRAZIONE: Se $P \in \mathfrak{S}_{sc}(M)$ allora $I_P : \tilde{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ è tale che, se $p : M \longrightarrow \tilde{M}$ è la proiezione, la funzione $I_P \circ p$ appartiene a $C^\infty(M)$, dato che P è un tensore e quindi una sezione differenziabile di un fibrato; ora la tesi segue immediatamente dal fatto che $I_P \circ p$ è costante sulle foglie simplettiche.
QED

Notiamo che se M è nulla allora l'unico tensore simplettico è 0 e quindi l'unica funzione integrale è la funzione nulla; viceversa le funzioni di Casimir su M sono tutte le funzioni differenziabili. Questa eccezionalità dipende dal fatto che le nostre costruzioni basate sui tensori simplettici non riescono a distinguere una varietà nulla da una varietà ridotta ad un sol punto.

La parentesi di Schouten di due elementi $P \in \mathfrak{S}^p_{sc}(M)$ e $Q \in \mathfrak{S}^q_{sc}(M)$ è un elemento di $\mathfrak{S}^{p+q-1}_{sc}(M)$: infatti la formula di Nijenhuis implica chiaramente che $\operatorname{supp}[P,Q] \subset \operatorname{supp} P \cap \operatorname{supp} Q$. Dunque il differenziale d_π rende gli spazi $\mathfrak{S}^p_{sc}(M)$ un complesso la cui coomologia è la *coomologia a supporto sezionalmente compatto* di M e si denota $H^p_{sc}(M)$.

Questa coomologia coincide con quella simplettica solo se ogni foglia della varietà è compatta: chiamiamo una varietà di Poisson siffatta *massimale*, mentre chiamiamo *minimale* una varietà di Poisson in cui tutte le foglie siano dense, come è il caso del $\mathbb{T}^3$ ergodico.

Notiamo che $\mathfrak{S}_{sc}$ non definisce un funtore, a differenza di $\mathfrak{S}$, perché il *pull-back* di tensori simplettici a supporto sezionalmente compatto non è ha in generale supporto sezionalmente compatto: ovviamente, restringendo i morfismi di varietà di Poisson alle funzioni "sezionalmente proprie otterremmo un funtore controvariante; notiamo comunque che $\mathfrak{S}_{sc}$ è da considerarsi un funtore covariante rispetto alle inclusioni di insiemi aperti $U \subset M$: infatti se $i_U : U \longrightarrow M$ è una tale inclusione, la mappa che a $P \in \mathfrak{S}_{sc}(U)$ associa il tensore simplettico ottenuto estendendo[3] P a zero esternamente a U definisce un morfismo di algebre $\mathfrak{S}_{sc}(U) \longrightarrow \mathfrak{S}_{sc}(M)$.

5.3 Omologia simplettica

Abbiamo già rilevato che l'omologia delle foglie è l'omologia singolare rispetto ad una certa topologia su M; vediamo quindi come le proprietà essenziali del funtore di omologia si inquadrano nel nostro contesto particolare.

La prima domanda che è naturale porsi è se esista una nozione di "invarianza omotopica per questa omologia: ovviamente, dato che nella topologia

[3]Precisamente, dato $P \in \mathfrak{S}_{sc}(M)$, basta estendere a zero ogni sua restrizione $P|_{U\cap S}$ dalle foglie di U a quelle di M.

delle foglie la varietà va supposta sconnessa (se è connessa è certamente simplettica) non ha senso parlare di omotopia se non sulle singole foglie (che sono connesse per archi). Possiamo comunque considerare la seguente

Definizione 5.3.1 *Una* omotopia simplettica *fra due funzioni* $f, g : M \longrightarrow N$ *differenziabili di Poisson è una funzione differenziabile*

$$h : M \times I \longrightarrow N$$

tale che per ogni $t \in I = [0, 1]$ *la funzione* $x \mapsto h(x, t)$ *sia di Poisson e*

$$h(x, 0) = f(x) \qquad e \qquad h(x, 1) = g(x)$$

per ogni $x \in M$.

Dunque una omotopia simplettica è un cammino in

$$P^\infty(M, N) = \{F \in C^\infty(M, N) \,|\, F \text{ è di Poisson}\}$$

da f a g. Ad esempio consideriamo $M = N$ nulle: allora $P^\infty(M, N) = C^\infty(M, N)$ e il concetto che otteniamo è semplicemente quello di omotopia differenziabile; se M è simplettica e N è nulla allora $P^\infty(M, N)$ contiene solo le funzioni costanti e quindi, se N è connesso per archi, basta considerare un cammino $c : I \longrightarrow M$ fra $\operatorname{im} F = \{x_F\}$ e $\operatorname{im} G = \{x_g\}$, per avere una omotopia simplettica $h(x, t) = c(t)$. Viceversa, sia M nulla e N simplettica: allora una funzione $F : M \longrightarrow N$ appartiene a $P^\infty(M, N)$ se e solo se, per ogni $f, g \in C^\infty(N)$:

$$0 = \{f \circ F, g \circ F\} = \omega(X_{f \circ F}, X_{g \circ F})$$

ove ω è la forma simplettica su N; dunque F deve essere costante, essendo ω non degenere, sicché, se N è connessa per archi, di nuovo troviamo che ogni applicazione è simpletticamente omotopa.

Osserviamo che l'omotopia simplettica è un concetto molto più forte della normale omotopia (anche differenziabile): ad esempio, se $M = \mathbb{R}^2$ è il piano simplettico, l'identità $F = id_{\mathbb{R}^2}$ è ovviamente una mappa di Poisson, mentre una mappa costante drammaticamente non lo è (una mappa di Poisson deve preservare la forma simplettica, quindi le aree!); in particolare non possono essere simpletticamente omotope.

Teorema (INVARIANZA PER OMOTOPIA) **5.3.2** *Se* $F, G \in P^\infty(M, N)$ *sono simpletticamente omotope allora inducono lo stesso morfismo* $F_* = G_*$ *in omologia.*

DIMOSTRAZIONE: Ovviamente la dimostrazione consiste nella costruzione di un morfismo di complessi $K : (S^L(M), \partial) \longrightarrow (S^L(N), \partial)$ che sia "omotopico, cioè tale che

$$G_* - F_* = \partial \circ K + K \circ \partial$$

Infatti, in questo caso, la tesi segue come al solito: se $[c] \in H^L(M)$ allora $\partial c = 0$ e quindi $F_*[c] = [G_*c - \partial Kc] = G_*[c]$.

Anche la costruzione di K non presenta novità rispetto ai casi comuni in algebra omologica: vogliamo, per ogni $i \geq 0$, costruire dei morfismi di complessi $K_i : S_i^L(M) \longrightarrow S_i^L(N)$ e possiamo farlo sui simplessi ed estendere poi per linearità; per semplicità supporremo che i simplessi siano cubici $c : I^i \longrightarrow M$, e quindi che l'operatore di bordo sia della forma

$$\partial c = \sum_{j=1}^{n} (-1)^j (R_j c - F_j c)$$

ove F_i e R_i sono le facce "fronte e "retro del cubo singolare:

$$F_j(c)(t_1, ..., t_{i-1}) = c(t_1, ..., t_{k-1}, 1, t_k, ..., t_{i-1})$$
$$R_j(c)(t_1, ..., t_{i-1}) = c(t_1, ..., t_{k-1}, 0, t_k, ..., t_{i-1})$$

($t_k \in I$). Ora consideriamo una omotopia simplettica $h : M \times I \longrightarrow N$ fra F e G (che esiste per ipotesi) e poniamo

$$K_i(c)(t_1, ..., t_{i+1}) = h(c(t_2, ..., t_{i+1}), t_1)$$

Ovviamente

$$F_1K_i = F_*, \qquad R_1K_i = G_*, \qquad F_jK_i = K_{i-1}F_{j-1}, \qquad R_jK_i = K_{i-1}R_{j-1}$$

(con $1 < j < i + 1$). Dunque

$$\begin{aligned}
\partial K_i &= \sum_{j=1}^{i+1} (-1)^j (R_jK_i - F_jK_i) = (G_* - F_*) + \sum_{j=2}^{i+1} (-1)^j (R_jK_i - F_jK_i) \\
&= (G_* - F_*) + \sum_{j=2}^{i+1} (-1)^j (K_{i-1}R_{j-1} - K_{i-1}F_{j-1}) \\
&= (G_* - F_*) - K_{i-1} \sum_{j=1}^{i} (-1)^j (R_j - F_j) \\
&= (G_* - F_*) - K_{i-1} \circ \partial
\end{aligned}$$

QED

Consideriamo ora l'omologia relativa: sia M una varietà di Poisson e N una sottovarietà di Poisson; questo vuol dire che l'immersione $i : N \longrightarrow M$ è una mappa di Poisson e che la topologia di N è quella indotta da M. In particolare, le foglie di N sono le intersezioni con N delle foglie di M. Possiamo quindi considerare le catene simplettiche $S(N)$ in N, che costituiscono un sotto-complesso di $S(M)$, e il modulo quoziente $S(M)/S(N)$. Ovviamente il diagramma

$$\begin{tikzcd} S_q(M) \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & S_q(M)/S_q(N) \arrow[d, "\overline{\partial}"'] \\ S_{q-1}(M) \arrow[r] & S_{q-1}(M)/S_{q-1}(N) \end{tikzcd}$$

commuta se $\overline{\partial}[c] = [\partial c]$. Possiamo quindi considerare i gruppi di omologia delle foglie relativa $H^L(M, N)$ come quelli del complesso quoziente $S(M)/S(N)$. Evidentemente, un simplesso simplettico s è relativo a N se e solo se il supporto del suo bordo è contenuto in N.

Il teorema fondamentale sull'omologia relativa non presenta alcuna differenza con quello usuale, quindi verrà solo enunciato:

Teorema (Successione esatta della coppia) **5.3.3** *Se $N \subset M$ è una sottovarietà di Poisson con la topologia indotta allora esiste una successione esatta*

$$\ldots \longrightarrow H_i^L(N) \longrightarrow H_i^L(M) \longrightarrow H_i^L(M,N) \longrightarrow H_{i-1}^L(N) \longrightarrow \ldots$$

indotta dall'inclusione $N \subset M$ e dalla proiezione $S(M) \longrightarrow S(M,N)$.

Anche il teorema di escissione sussiste inalterato, avendo l'accortezza di intendere il termine *interno* rispetto alla topologia delle foglie.

Teorema (Escissione) **5.3.4** *Se $N \subset M$ è una sottovarietà di Poisson con la topologia indotta e $X \subset N$ un sottoinsieme la cui chiusura (nella topologia delle foglie) sia contenuta nell'interno di X. Allora sussistono gli isomorfismi*

$$H_i^L(M \setminus X, N \setminus X) \cong H_i^L(M,N)$$

indotti dall'inclusione di coppie $(N, X) \subset (M, N)$.

L'omologia che abbiamo fin qui introdotto è estremamente naturale, dato che dipende solo dalla struttura di Poisson, ma proprio per questo si rivela troppo semplice per essere realmente utile: in fondo non fa altro che sommare le singole omologie delle foglie. Ad esempio consideriamo $\mathbb{R}^3$ con coordinate cartesiane (x, y, z) e la varietà M ottenuta eliminando da $\mathbb{R}^3$ l'asse $\{x = y = 0\}$; su questa varietà esiste una struttura di Poisson regolare ottenuta per *pull-back* della forma simplettica sul piano "bucato $M \cap \{z = 0\}$ rispetto alla proiezione ortogonale $(x, y, z) \mapsto (x, y)$. Evidentemente l'omologia delle foglie di questa varietà, le cui foglie sono le intersezioni di M con i piani paralleli a $\{z = 0\}$, è

$$H^L(M) = \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \oplus \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$$

perché si tratta di sommare le omologie dei singoli piani bucati, che sono $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$. Abbiamo così un'algebra di dimensione infinita (continua) che non contiene nessuna informazione in più della singola omologia di ciascuna foglia.

Per trovare un invariante più raffinato, escogitiamo un metodo per "cancellare le informazioni superflue dall'omologia delle foglie: ad esempio, nel caso $\mathbb{R}^3$ precedente, è ovviamente possibile "schiacciare tutte le foglie su una sola senza alterare l'informazione omologica in esse contenuta; l'idea è che in questo caso M è un fibrato su $\tilde{M}$ con fibra $\mathbb{R}^2 \setminus 0$.

Consideriamo invece, sempre su $\mathbb{R}^3 \setminus \{x = y = 0\}$, la struttura di Poisson data dalle parentesi

$$\{f, g\}(x, y, z) = \rho(z) \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x} \right)$$

ove ρ è una funzione a supporto compatto $[-1, 1]$. Si tratta di una struttura non regolare, che possiede le seguenti foglie simplettiche: i piani "bucati $\{z = r\} \setminus \{(0, 0, r)\}$ per $1 \leq r \leq 1$ e i punti $\{(x, y, z)\}$ per $|z| > 1$. Evidentemente i piani $\{z = \pm 1\} \setminus \{0, 0, \pm 1)\}$ sono composti da punti singolari.

Ora è chiaro che le foglie bidimensionali contengono più informazioni che quelle di dimensione zero: in effetti lo spazio delle foglie è della forma

$$\begin{aligned} \tilde{M} = \{\{(x, y, z)\} \,|\, z < 1 \text{ e } x^2 + y^2 \neq 0\} \cup \\ \cup\ [-1, 1] \cup \{\{(x, y, z)\} \,|\, z > 1 \text{ e } x^2 + y^2 \neq 0\} \end{aligned}$$

cioè due semispazî privati di una semiretta congiunti da un intervallo.

Vogliamo ora definire una omologia più significativa per una varietà di Poisson, che in qualche modo "riassuma il contributo omologico di ciascuna foglia simplettica in modo più restrittivo di quanto non faccia l'omologia delle foglie.

Come primo passo notiamo una interpretazione "funzionale dell'omologia delle foglie: possiamo pensare una catena totale come una funzione

$$\varphi : \tilde{M} \longrightarrow \bigcup_{S \in \tilde{M}} C(S)$$

(ove $C(S)$ è lo spazio delle catene singolari nella foglia S) che sia una "sezione, cioè tale che

$$(I) \qquad \varphi(S) \in C(S)$$

per ogni $S \in \tilde{M}$. Ovviamente una catena simplettica, essendo combinazione lineare di catene nelle singole foglie, può pensarsi come una funzione di questo tipo non nulla solo per un numero finito di foglie.

Per restringere il nostro campo d'azione, proviamo quindi ad imporre qualche altra condizione alle sezioni φ.

Per farlo vogliamo definire funzioni C^∞ dallo spazio delle foglie allo spazio di tutte le possibili omologie delle foglie stesse, che siano "sezioni rispetto al "fibrato che, su ogni foglia, mette lo spazio vettoriale della sua omologia singolare.

Precisamente consideriamo l'insieme delle funzioni

$$\varphi : \tilde{M} \longrightarrow \bigcup_{S \in \tilde{M}} C(S)$$

ove $C(S)$ è lo spazio vettoriale delle catene singolari sulla varietà simplettica, tali che

$$\varphi(S) \in C(S)$$

Si tratta cioè delle funzioni su $\tilde{M}$ che a ciascuna foglia associano una catena singolare (cioè una combinazione lineare di simplessi $s : \Delta^k \longrightarrow S$) di quella foglia. Selezioniamo, fra tutte queste funzioni, quelle "differenziabili, cioè tali che per ogni tensore simplettico P su M la funzione

$$\varphi_P(S) = \int_{\varphi(S)} P$$

sia differenziabile su $\tilde{M}$, cioè tale che la funzione $M \setminus \Sigma M \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(II) \qquad x \mapsto \varphi_P(S_x) = \int_{\varphi(S_x)} P$$

sia differenziabile, ove ΣM è il luogo singolare della varietà di Poissone S_x è la foglia simplettica passante per x: evidentemente si tratta di una funzione costante sulle foglie, cioè di una funzione di Casimir (si noti che l'immagine di $M \setminus \Sigma M$ in $\tilde{M}$ è l'insieme delle foglie di dimensione pari al rango generico della varietà).

La restrizione a $M \setminus \Sigma M$ è necessaria in quanto vogliamo che le nostre funzioni siano "genuinamente differenziabili rispetto alla struttura di Poisson, e quindi dobbiamo ignorare le singolarità rispetto a questa struttura. In effetti ignorando il comportamento di φ sulle foglie singolari non perdiamo il controllo della funzione $M \longrightarrow \mathbb{R}$ risultante, perché, come sappiamo, l'insieme ΣM è "piccolo sotto ogni punto di vista, essendo raro e di misura nulla: dato che la nostra condizione (II) coinvolge l'integrazione è del tutto naturale escludere il contributo di insiemi di misura nulla (rispetto alla misura su M).

Dunque stiamo considerando delle funzioni che scelgono per ciascuna foglia una catena in modo che l'integrazione su questa catena sia *al variare della foglia* una funzione differenziabile. Si rammenti che l'integrale

$$\int_c P$$

di un tensore simplettico lungo una catena contenuta in una singola foglia è definito in termini della forma cui, sulla foglia stessa, il tensore è identificabile per mezzo dell'isomorfismo indotto dalla struttura di Poisson: in particolare se la catena ha grado p l'unica componente della forma (e quindi del tensore) che contribuisce all'integrale è quella di grado p.

Denoteremo con $\mathcal{C}(M)$ l'insieme delle funzioni φ soddisfacenti alle (I) e (II) e ci riferiremo ai suoi elementi come alle *sezioni singolari* della varietà di Poisson M.

Esempio. Se M è simplettica (e connessa) allora $\tilde{M} = \{M\}$ e le mappe

$$\varphi : \{M\} \longrightarrow C(M)$$

sono le costanti, cioè le scelte di una catena in M. La differenziabilità è sempre verificata, dato che le funzioni di Casimir sono solo le costanti, dunque $\mathcal{C}(M) = C(M)$.

Esempio. Nel caso di una varietà di Poisson nulla, possiamo identificare $\tilde{M}$ con M e $\bigcup_{x\in M} C(\{x\})$ con $\mathbb{R}$, sicché le sezioni singolari sono funzioni $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che la valutazione di un 0-tensore simplettico (cioè di una funzione differenziabile) sia una funzione di Casimir (cioè una qualsiasi funzione differenziabile). Dunque $\mathcal{C}(M) = C^\infty(M)$ (si rammenti: $\Sigma M = \emptyset$).

Definiamo nel modo più ovvio le operazioni vettoriali come

$$(a\varphi + b\psi)(S) = a\varphi(S) + b\psi(S)$$

Evidentemente questo rende $\mathcal{C}(M)$ uno spazio vettoriale reale; possiamo anche renderlo un'algebra con la struttura indotta, foglia per foglia, dal prodotto "cap di catene singolari, che è definito in termini della dualità con la coomologia:

$$\varphi \cap \psi(S) = \varphi(S) \cap \psi(S)$$

Esiste una relazione fra le sezioni singolari e le catene simplettiche: precisamente, se consideriamo le catene simplettiche infinite $C^{S\infty}(M)$, cioè le serie formali a coefficienti reali di simplessi simplettici su M, abbiamo una mappa

$$\mathcal{C}(M) \longrightarrow C^{S\infty}(M)$$

che alla sezione φ associa la catena

$$\sum_{S\in\tilde{M}} \varphi(S)$$

Ora vogliamo mostrare che $\mathcal{C}(M)$ è un $\mathrm{Cas}(M)$-modulo: cioè possiamo moltiplicare una sezione φ per una funzione di Casimir c come

$$(c\varphi)(S) = c(S)\varphi(S)$$

(dato che c è di Casimir è una costante su S). Dimostriamo che questa è ancora una sezione: per prima cosa è ovvio che

$$(c\varphi)(S) \in C(S)$$

Inoltre, per ogni $P \in \mathfrak{S}(M)$, la funzione

$$(c\varphi)_P(x) = \int_{c(S_x)\varphi(S_x)} P = c(S_x) \int_{\varphi(S_x)} P$$

è di Casimir: infatti è il prodotto di due funzioni di Casimir.

Anche $\mathfrak{S}(M)$ è un modulo sulle funzioni di Casimir: se $P \in \mathfrak{S}(M)$ e $c \in \mathrm{Cas}\, M$, sia

$$(cP)(x) = c(x)P(x)$$

Esiste una dualità naturale fra i moduli $\mathcal{C}(M)$ e $\mathfrak{S}(M)$:

$$\langle , \rangle : \mathcal{C}(M) \times \mathfrak{S}(M) \longrightarrow \mathrm{Cas}\, M$$

definita per mezzo dell'integrale

$$\langle \varphi, P\rangle(x) = \int_{\varphi(S_x)} P$$

Infatti, che sia $\mathbb{R}$-bilineare è ovvio, e, se $c \in \mathrm{Cas}\, M$:

$$\langle c\varphi, P\rangle(x) = \int_{c\varphi(S_x)} P = c(x) \int_{\varphi(S_x)} P = \int_{\varphi(S_x)} cP = \langle \varphi, cP\rangle$$

Ovviamente l'algebra $\mathcal{C}(M)$ è graduata, e possiamo definire un bordo che rispetti il grado usando il solito bordo di catene singolari:

$$\partial\varphi(S) = \partial(\varphi(S))$$

Allora $\partial\partial = 0$ e quindi $\mathcal{C}(M)$ è un complesso di catene, del quale possiamo considerare l'omologia $\mathcal{H}(M)$: chiamiamo *omologia simplettica* questa omologia singolare.

Ad esempio l'omologia simplettica di una varietà simplettica è precisamente l'omologia singolare a coefficienti reali.

Teorema 5.3.5 *Lo spazio $\mathcal{H}_k(M)$ è esattamente lo spazio vettoriale delle sezioni differenziabili*

$$\chi : \tilde{M} \longrightarrow \bigcup_{S\in\tilde{M}} H_k(S)$$

a valori negli spazi di omologia singolare di grado k.

DIMOSTRAZIONE: Per definizione un elemento di $\mathcal{H}_k$ è una classe di k-cociclo modulo k-cobordi: se $[\varphi]$ è una tale classe allora

$$\partial(\varphi(S)) = (\partial\varphi)(S) = 0$$

cioè le immagini di φ sono cocicli singolari nelle foglie, e analogamente $\psi \in [\varphi]$ se $\varphi - \psi$ è il bordo di qualche $k+1$-sezione singolare.

QED

Ad esempio, dato che l'omologia in grado zero conta le componenti connesse e che ciascuna foglia è connessa, le classi di coomologia simplettica si identificano alle funzioni differenziabili sullo spazio delle foglie, cioè

Corollario 5.3.6 $\mathcal{H}_0(M) = \operatorname{Cas} M \oplus \mathbb{R}^{\Sigma\tilde{M}}$ *ove $\Sigma\tilde{M}$ è lo spazio delle foglie singolari.*

Esempio. Se torniamo al nostro esempio $M = \mathbb{R}^3 \setminus \{x = y = 0\}$, ricordando che $\tilde{M}$ era l'unione di due semispazî bucati α_1 e α_2 con un segmento I, otteniamo che:

$$\mathcal{H}_0(M) = \operatorname{Cas} M$$

è lo spazio delle funzioni $f(x, y, z)$ che, per $|z| \leq 1$ dipendono solo dalla variabile z. Gli elementi di $\mathcal{H}_1(M)$ sono le sezioni del tipo

$$\varphi : \alpha_1 \cup I \cup \alpha_2 \longrightarrow \bigcup_{t\in I} \mathbb{R}$$

dato che $H_1(S)$ è zero per $S \in \alpha_i$ (trattandosi di un punto), ed è unidimensionale per $S \in I$; si tratta cioè di funzioni reali tali che, per ogni P:

$$(x, y, z) \mapsto \int_{\varphi(S_{(x,y,z)})} P$$

è una funzione di Casimir: ma, per $S \in \alpha_i$ abbiamo $\varphi(S) = 0$, e per $S \in I$ abbiamo $\varphi(S) \in \mathbb{R}$, quindi la funzione precedente diviene

$$(x, y, z) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{se } |z| > 1 \\ \int_{\mathbb{R}^2 \setminus 0} P & \text{se } |z| \leq 1 \end{cases}$$

L'integrazione che abbiamo definito sulle foglie può suggestivamente essere descritta come segue:

$$\int P = \int_{\tilde{M}} \int_S P|_S dS$$

cioè come un integrale doppio sullo spazio misurabile $M \times \tilde{M}$: in effetti se P è un tensore simplettico possiamo definire la funzione

$$\Pi(S) = \int_S P$$

che a sua volta possiamo integrare sullo spazio delle foglie. Tuttavia la classe di misura di Lebesgue sullo spazio delle foglie può essere banale, nel senso che le uniche funzioni misurabili possono rivelarsi le costanti.

Esiste un metodo per aggirare questo ostacolo, che consiste nel considerare la teoria dell'integrazione non commutativa (cfr. [24]). Questa ha luogo sulle varietà che posseggano una fogliazione, ma qui, sfruttando la presenza di una struttura simplettica sulle foglie, riusciamo comunque ad associare un'algebra di von Neumann ad ogni varietà di Poisson, seguendo sostanzialmente il procedimento che von Neumann e Murray utilizzarono nel definire esempi di fattori usando le azioni libere di gruppi discreti su spazi di misura, e che ha suggerito a Connes il caso delle fogliazioni regolari. Il risultato qui ottenuto è un funtore dalla categoria delle varietà di Poisson alla categoria delle algebre di von Neumann, diverso da quello considerato da Weinstein e altri in quanto non coinvolge direttamente la considerazione del gruppoide simplettico associato alla varietà di Poisson ed è una costruzione uniforme e perfettamente generale.

5.4 L'algebra di von Neumann di una varietà di Poisson.

Consideriamo una varietà di Poisson M del tutto arbitraria: vogliamo costruire un'algebra di "funzioni misurabili non commutativa (in sostituzione dell'algebra delle funzioni essenzialmente limitate sullo spazio delle foglie) e, per farlo, ci ispiriamo direttamente alla teoria degli *operateurs aleatoires* di Connes (cfr. [23]–[26]).

Per prima cosa notiamo che a ciascuna foglia $S \subset M$ possiamo associare uno spazio di Hilbert separabile $L^2(S, d\sigma^r)$ ove σ è la forma simplettica indotta dalla struttura di Poisson di M e $\dim S = 2r$; possiamo anche immaginare questa corrispondenza come un "fibrato di spazi di Hilbert sullo spazio delle foglie $\tilde{M}$. L'idea è generalizzare questa costruzione ad una varietà di Poisson qualsiasi riconducendoci a questo caso per mezzo della decomposizione in foglie simplettiche: piuttosto che usare le semi-densità sulle foglie e i relativi fibrati, cosa che nel nostro contesto con singolarità potrebbe non avere senso, e quindi gli operatori aleatori, come dètta il procedimento di Connes, proviamo a definire prima uno spazio di Hilbert e poi gli operatori su di esso, il che darà il non trascurabile vantaggio di fornire esplicitamente l'azione dell'algebra di operatori che costruiremo su un ben determinato spazio di Hilbert, e per farlo ci appelliamo ad una costruzione universale dovuta a von Neumann: l'integrale diretto.

Avremo bisogno di considerare M e $\tilde{M}$ come spazi misurabili; per prima cosa ricordiamo che una qualsiasi varietà (anche solo topologica, purché pura) ammette una misura di Lebesgue (cfr. [33, §XVI-22]) essenzialmente unica:

Teorema 5.4.1 *Se M è una varietà di dimensione n allora esiste una misura positiva μ su M tale che per ogni carta locale $(U;\varphi)$ l'immagine $\varphi_*\mu|_U$ di μ rispetto al diffeomorfismo φ è una derivata di Radon–Nikodym differenziabile della misura di Lebesgue in $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$. Se ν è un'altra misura su M con la stessa proprietà allora μ e ν sono equivalenti e la derivata di Radon–Nikodym dell'una rispetto all'altra è una funzione differenziabile.*

È conveniente interpretare le misure come funzionali lineari e continui sullo spazio delle funzioni a supporto compatto: allora la misura di Lebesgue μ su M si proietta nella misura di Lebesgue su $\tilde{M}$ come

$$\tilde{\mu}(f) = \mu(f \circ p)$$

se $p : M \longrightarrow \tilde{M}$ è la proiezione canonica. Guardando alle misure come funzioni insiemistiche, per E misurabile:

$$\tilde{\mu}(E) = \int_{\tilde{M}} \chi_E d\tilde{\mu} = \int_M \chi_{p^{-1}(E)} d\mu = \mu(p^{-1}(E))$$

In particolare se un insieme $X \subset \tilde{M}$ è immagine di un insieme di misura nulla allora ha misura nulla.

Ad esempio, su una varietà simplettica l'unica misura che si ottiene sull'insieme $\tilde{M} = \{M\}$ ridotto ad un solo punto è la misura di Dirac concentrata in quel punto, cioè la valutazione $\tilde{\mu}(f) = f(\{M\})$, che, insiemisticamente, assegna a $\{M\}$ la costante[4] $\mu(M)$, ove μ è la misura su M indotta dalla forma di volume simplettica. All'estremo opposto abbiamo le varietà nulle, per le quali $\tilde{M} \cong M$, e quindi, dato che p è la mappa identità, $\tilde{\mu}$ è esattamente μ.

D'ora in poi supporremo che μ sia la misura di Lebesgue su M e $\tilde{\mu}$ la misura di Lebesgue su $\tilde{M}$ immagine di μ.

A ciascun elemento di $\tilde{M}$ possiamo far corrispondere uno spazio di Hilbert usando la struttura di Poisson su M: basta infatti considerare, per $S \in \tilde{M}$, lo spazio $L^2(S, \sigma^r)$ ove σ è la misura indotta dalla forma simplettica su S, che si ottiene restringendo ad essa il tensore di Poisson e $2r = \dim S$.

Vogliamo ora sommare tutti i contributi di questi spazi di Hilbert tenendo conto della misura su $\tilde{M}$:

Definizione 5.4.2 *Se M è una varietà di Poisson definiamo il suo* spazio di Hilbert associato *come l'integrale diretto*

$$\mathcal{H}_M = \int_{\tilde{M}}^{\oplus} L^2(S, \sigma^r) d\tilde{\mu}(S)$$

($r = \frac{1}{2} \dim S$) esteso all'intero insieme $\tilde{M}$ rispetto alla misura $\tilde{\mu}$.

Ricordiamo brevemente la proprietà universale che caratterizza gli integrali diretti di spazi di Hilbert (cfr. [79], [33], [48]: questa nozione è stata introdotta da von Neumann per ridurre la teoria delle algebre di operatori che ora portano il suo nome alla teoria dei fattori): non ci poniamo nella maggior generalità possibile ma, dato che i nostri spazi saranno sempre spazi di funzioni a quadrato integrabile su varietà, supporremo di considerare spazi di Hilbert separabili e quindi di integrarli su spazi σ-compatti[5] localmente compatti.

Definizione 5.4.3 *Se X è uno spazio topologico localmente compatto e σ-compatto, μ il completamento di una misura boreliana su X e $\{\mathcal{H}_x\}_{x \in X}$ una famiglia di spazi di Hilbert separabili (con prodotti hilbertiani $\langle\rangle_x$) indicizzata dai punti di X, allora uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ è l'*integrale diretto *della famiglia $\{\mathcal{H}_x\}$ esteso allo spazio X se ad ogni suo elemento v corrisponde una funzione $f_v : X \longrightarrow \bigcup_x \mathcal{H}_x$ tale che*

[4] Come al solito in teoria della misura, consideriamo come costanti positive tutti i valori dell'intervallo chiuso $[0, \infty]$.

[5] Che siano cioè unione numerabile di insiemi compatti il che, nel caso delle varietà, equivale alla paracompattezza e non comporta dunque una ipotesi eccessivamente restrittiva (ma anzi assai conveniente).

(ID1) *La funzione reale* $x \mapsto \langle f_v(x), f_w(x)\rangle_x$ *sia integrabile su* X *per ogni* $v, w \in \mathcal{H}$, *e il prodotto scalare in* $\mathcal{H}$ *è*

$$\langle v, w\rangle = \int_X \langle f_v(x), f_w(x)\rangle_x d\mu(x)$$

(ID2) *Se* $\{v_x\}$ *è una famiglia di vettori* $v_x \in \mathcal{H}_x$ *e se per ogni* $w \in \mathcal{H}$ *la funzione* $x \mapsto \langle v_x, f_w(x)\rangle_x$ *è integrabile su* X *allora esiste un vettore* $v \in \mathcal{H}$ *tale che* $f_v(x) = v_x$ *per quasi ogni* $x \in X$.

Questa definizione descrive la proprietà universale dell'integrale diretto, che ovviamente lo caratterizza a meno di isometrie unitarie di spazi di Hilbert: fornisce anche un suggerimento per la costruzione effettiva dell'integrale, che vogliamo esplicitamente riportare. Infatti la nozione di integrale diretto è applicata generalmente per riconoscere se uno spazio di Hilbert è integrale diretto (il che corrisponde alla nozione di somma diretta interna), mentre noi qui abbiamo bisogno di costruire esplicitamente uno spazio di Hilbert con questa proprietà: ovviamente questo non è difficile, in astratto, perché basta ispirarsi alla definizione. Il nostro procedimento è una variante di quello di Dixmier [33]: si consideri la famiglia $\{\mathcal{H}_x\}$ parametrizzata dai punti di X e si definisca $\mathcal{H}$ come l'insieme delle funzioni $f : X \longrightarrow \bigcup_{x\in X} \mathcal{H}_x$ tali che $f(x) \in \mathcal{H}_x$ per ogni $x \in X$ e che la funzione $x \mapsto ||f(x)||_x^2$ sia misurabile e l'integrale

$$\int_X ||f(x)||_x^2 d\mu(x)$$

sia finito. Definiamo allora per gli elementi di $\mathcal{H}$ la norma

$$||f|| = \sqrt{\int_X ||f(x)||_x^2 d\mu(x)}$$

al solito modo.

Evidentemente $\mathcal{H}$ è uno spazio di Banach, dato che se $f, g \in \mathcal{H}$ $a, b \in \mathbb{C}$ possiamo definire $(af+bg)(x) = af(x)+bg(x)$ ottenendo ancora una funzione che soddisfa le proprietà di appartenenza a $\mathcal{F}$: in particolare

$$||af + bg|| \leq |a|\,||f|| + |b|\,||g||$$

per la disuguaglianza di Minkowski. Inoltre si osservi che

$$\langle f, g\rangle = \int_X \langle f(x), g(x)\rangle_x dx$$

definisce un prodotto scalare di Hilbert: infatti vale l'identità di polarizzazione

$$||f + g|| - ||f - g|| + i||f + ig|| - i||f - ig|| = 4\langle f, g\rangle$$

usando l'identità di polarizzazione (nello spazio di Hilbert $\mathcal{H}_x$) su ciascun integrando. Notiamo infine che se $\{v_x\}$ è una famiglia di elementi in $\mathcal{H}_x$ allora se per ogni $f \in \mathcal{H}$ si ha che

$$\int_X \langle f(x), v_x \rangle_x d\mu(x) < \infty$$

possiamo definire la funzione $g(x) = v_x$ che, a meno di insiemi di misura nulla, apparterrà a $\mathcal{H}$.

Dunque

Teorema 5.4.4 *Se X è uno spazio topologico localmente compatto e σ-compatto, μ il completamento di una misura boreliana su X e $\{\mathcal{H}_x\}_{x\in X}$ una famiglia di spazi di Hilbert separabili (con prodotti hilbertiani $\langle\rangle_x$) indicizzata dai punti di X, allora esiste un unico spazio di Hilbert integrale diretto della famiglia $\{\mathcal{H}_x\}$ esteso allo spazio misurabile (X, μ).*

Usualmente si scrive

$$\mathcal{H} = \int_X^{\oplus} \mathcal{H}_x d\mu(x)$$

ma noi ometteremo il segno di somma diretta in apice all'integrale. Notiamo che se $f_v = f_w$ quasi ovunque allora

$$||v - w||^2 = \int_X ||f_v(x) - f_v(x)||_x^2 d\mu(x) = 0$$

da cui

Proposizione 5.4.5 *Se $f_v = f_w$ quasi ovunque allora $v = w$.*

Esempio. Consideriamo una varietà simplettica M: allora $\tilde{M} = \{M\}$ e quindi l'integrale diretto si riduce semplicemente allo spazio $\mathcal{H}_M = L^2(M)$ stesso: infatti la misura μ sullo spazio costituito da un solo punto è, a meno di fattori moltiplicativi non nulli, la valutazione nel punto.

Esempio. Se M è una varietà di Poisson nulla allora

$$\mathcal{H}_M = \int_M^{\oplus} L^2(\{x\}) d\mu(x) = \int_M^{\oplus} \mathbb{C} d\mu(x) = L^2(M, \mu)$$

L'ultimo passaggio, che identifica l'integrale diretto con lo spazio $L^2(M)$, segue dal teorema precedente: infatti se $v \in L^2(M, \mu)$ allora basta porre $f_v(x) = v(x)$ per avere

$$\int_X \langle f_v(x), f_v(x) \rangle_x d\mu(x) = \int_X v(x)\overline{v(x)} d\mu(x) < \infty$$

per definizione di funzione L^2, e, per ogni famiglia di numeri complessi $\{c_x\}$ (cioè per ogni funzione $c : X \longrightarrow \mathbb{C}$) tale che per ogni $w \in L^2(M, \mu)$ si abbia

$$\int_X c(x)\overline{w(x)} < \infty$$

allora $c \in L^2(M, \mu)$ (si rammenti che gli elementi di L^2 vanno in realtà considerati come classi di equivalenza modulo uguaglianza quasi-ovunque); è infatti ben noto dalla teoria dell'integrazione che

$$\forall g \in L^2(X, \mu) \qquad fg \in L^1(X, \mu) \implies f \in L^2(X, \mu)$$

(basta notare che l'operatore $M_f : L^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ definito come $M_f(g) = \int fg$ è continuo, che sia lineare è ovvio, e che quindi $M_f \in (L^2)^*$ cioè, in virtù del teorema di Riesz, $f \in L^2$: questo segue sostanzialmente dalla disuguaglianza di Minkowski e dal fatto che possiamo assumere $f \in L^\infty$).

Esempio. Se $M = \mathbb{R}_0^2$ allora l'integrale diretto si riduce ad una somma diretta

$$\mathcal{H}_M = L^2(\mathbb{R}^2 \setminus 0) \oplus \mathbb{C}$$

Teorema 5.4.6 *Se $M = N \times P$ è il prodotto di Poisson delle varietà di Poisson N e P allora $\mathcal{H}_M = \mathcal{H}_N \otimes \mathcal{H}_P$.*

Dimostrazione: Cominciamo con l'osservare che le foglie simplettiche di M sono prodotti di foglie di N per foglie di P: ad esempio se (x_N, x_P) e (y_N, y_P) appartengono a M allora sono congiunti da una curva hamiltoniana a tratti $c : I \longrightarrow N \times M$ se e solo se le curve $c_N : I \longrightarrow N$ e $c_P : I \longrightarrow P$ che determinano c sono hamiltoniane a tratti in N e M. Dunque, se S è una foglia simplettica in M allora possiamo sempre decomporla come $S = S_N \times S_P$.

Ora consideriamo $\mathcal{H}_N \otimes \mathcal{H}_P$: vogliamo dimostrare che si tratta dell'integrale diretto

$$\int_M^\oplus L^2(S) d\mu(S)$$

Notiamo che la misura di Lebesgue su M è il prodotto delle misure di Lebesgue su N e P; ora se $v \otimes w \in \mathcal{H}_N \otimes \mathcal{H}_P$ possiamo definire la funzione

$$f_{v\otimes w}(S) = f_v(S_N) \otimes f_w(S_P)$$

ove $S = S_N \times S_P$ è la decomposizione indotta dal prodotto. Si noti che $f_{v\otimes w}(S)$ appartiene allo spazio

$$L^2(S_N) \otimes L^2(P) \cong L^2(N \otimes P) = L^2(M)$$

Dato che, per definizione di prodotto scalare nel prodotto tensoriale:

$$\begin{aligned}\langle f_{v\otimes w}(S), f_{v'\otimes w'}(S)\rangle_S &= \langle f_v(S_N)\otimes f_w(S_P), f_{v'}(S_N)\otimes f_{w'}(S_P)\rangle_S\\ &= \langle f_v(S_N), f_{v'}(S_N)\rangle_{S_N}\langle f_w(S_P), f_{w'}(S_P)\rangle_{S_P}\end{aligned}$$

la funzione $x \mapsto \langle f_{v\otimes w}(S), f_{v'\otimes w'}(S)\rangle_S$ è integrabile e quindi, per il teorema di Fubini:

$$\begin{aligned}&\int_{\tilde{M}}\langle f_{v\otimes w}(S), f_{v'\otimes w'}(S)\rangle_S d\tilde{\mu}(S) =\\ &\qquad= \int_{\tilde{N}}\int_{\tilde{P}}\langle f_v(S_N), f_{v'}(S_N)\rangle_{S_N}\langle f_w(S_P), f_{w'}(S_P)\rangle_{S_P} d\tilde{\nu}(S_N)d\tilde{\pi}(S_P)\\ &\qquad= \langle v, v'\rangle_N\langle w, w'\rangle_P = \langle v\otimes w, v'\otimes w'\rangle_M\end{aligned}$$

Dunque la (ID1) è verificata. Per verificare anche la (ID2) bisogna mostrare che per ogni famiglia di vettori $\{v_S\}$ in $L^2(S)$ se la funzione $S \mapsto \langle v_S, f_{v\otimes w}(S)\rangle$ è integrabile per ogni $v\otimes w$ allora $f_{v\otimes w}(S) = v_S$; per farlo basta osservare che la fattorizzazione $S = S_N \times S_P$ induce un isomorfismo $L^2(S) \cong L^2(S_N)\otimes L^2)S_P)$ e che la definizione di $f_{v\otimes w}$ implica

$$\begin{aligned}||f_{v\otimes w} - v||^2 &= \int_{\tilde{M}} ||f_{v\otimes w}(S) - v(S)||_S^2\\ &= \iint ||f_v(S_N)\otimes f_w(S_P) - v_N(S_N)\otimes v_P(S_P)||_S^2\\ &= \iint ||f_v(S_N)||_{S_N}^2 ||f_w(S_P)||_{S_P}^2 dS_N dS_P -\\ &\quad - \iint \langle f_v(S_N), v_N(S_N)\rangle_{S_N}\langle f_w(S_P), v_P(S_P)\rangle_{S_P} dS_N dS_P -\\ &\quad - \iint \langle v_N(S_N), f_v(S_N)\rangle_{S_N}\langle v_P(S_P), f_w(S_P)\rangle_{S_P} dS_N dS_P +\\ &\quad + \iint ||v_N(S_N)||_{S_N}^2 ||v_P(S_P)||_{S_P}^2 dS_N dS_P\end{aligned}$$

(ove gli integrali doppî sono su $\tilde{N}$ e $\tilde{P}$). Ma, dato che $\mathcal{H}_N$ e $\mathcal{H}_P$ sono integrali diretti, per le (ID2) relative a questi integrali, $f_v(S_N) = v_N(S_N)$ per quasi ogni S_N, e analogamente per S_P, dunque l'espressione precedente è nulla, e troviamo che $f_{v\otimes w} = v$ quasi ovunque.

QED

Lo spazio $\mathcal{H}_M$ è un invariante che dipende solo dalla struttura di Poisson su M: ad esempio se $F : M \longrightarrow N$ è un diffeomorfismo di Poisson allora possiamo considerare la mappa indotta

$$\tilde{F} : \tilde{M} \longrightarrow \tilde{N}$$

definita come segue: se $S \in \tilde{M}$ allora $\tilde{F}(S)$ è l'unica foglia simplettica di N che contiene l'insieme $F(S)$ (questo ha senso dato che F manda foglie in foglie). Se consideriamo $\mathcal{H}_M$ e $\mathcal{H}_N$ possiamo definire una funzione

$$U_F : \mathcal{H}_N \longrightarrow \mathcal{H}_M$$

come (ricordando che possiamo far corrispondere gli elementi $v \in \mathcal{H}_N$ a funzioni f_v che soddisfino le condizioni della definizione 5.4.3)

$$U_F(v)(S) = f_v(\tilde{F}(S))$$

per quasi ogni $S \in \tilde{M}$.

Teorema 5.4.7 *L'operatore U_F è unitario da $\mathcal{H}_N$ in $\mathcal{H}_M$: in particolare $\mathcal{H}_N \cong \mathcal{H}_M$.*

DIMOSTRAZIONE: Intanto notiamo che

$$U_F(v + w)(S) = f_{v+w} \circ \tilde{F} = (f_v + f_w) \circ \tilde{F} = f_v \circ \tilde{F} + f_w \circ \tilde{F}$$

Ovviamente anche $U_F(av) = aU_F(v)$. Ora si tratta di mostrare che l'operatore U_F è unitario, cioè che $||U_F(v)|| = ||v||$ (le norme vanno intese come le norme relative ai prodotti hilbertiani nei relativi spazi associati alle varietà). Intanto si noti che

$$||U_F(v)||_{\mathcal{H}_M} = \int_{\tilde{M}} ||f_v(\tilde{F}(S))||_S d\tilde{\mu}(S) = \int_{\tilde{N}} ||f_v(S)||_S d\tilde{\nu}(S)$$

(dato che F è un diffeomorfismo che preserva le foglie, e quindi induce isomorfismi fra le misure su S e su $\tilde{F}(S)$). Ma nell'integrale a destra, l'integrando è una funzione misurabile limitata, perché $f_v(S)$ è un operatore continuo in $L^2(S)$ il cui integrale converge a $||v||_{\mathcal{H}_N}$ per definizione di integrale diretto:

$$||U_F(v)||_{\mathcal{H}_M} = ||v||_{\mathcal{H}_N}$$

Questo dimostra che l'operatore U_F è unitario.

QED

Ora vogliamo definire una generalizzazione della nozione di funzione misurabile su $\tilde{M}$: anziché fare assumere valori nello spazio di Hilbert $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ alle nostre funzioni, faremo loro assumere valori nello spazio di Hilbert $\mathcal{H}_M$. Vogliamo cioè definire degli "operatori aleatori, secondo la definizione di Alain Connes (cfr. [23]–[26]). La nozione della quale abbiamo bisogno è stata già definita da von Neumann nel contesto della teoria dei fattori: la terminologia che qui usiamo è quella di Dixmier [33] che usa il termine "operatore decomponibile mentre von Neumann in [79] usa il termine "operatore generalizzato.

Definizione 5.4.8 *Un* operatore decomponibile A *su una varietà di Poisson* M *è un operatore lineare e continuo in* $\mathcal{H}_M$ *tale che esista una funzione* $f_A : \tilde{M} \longrightarrow \bigcup_{S\in\tilde{M}} \mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$ *tale che* $f_A(S) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$ *e*

$$\forall v \in \mathcal{H}_M \qquad \textit{per quasi ogni } S \in \tilde{M} \qquad f_A(S)f_v(S) = f_{Av}(S)$$

La funzione f_A *si dice* decomposizione dell'operatore A*.*

Esempio. Se $X \in \mathfrak{S}(M)$ è un campo vettoriale simplettico sulla varietà di Poisson M e se supponiamo che sia integrabile (ad esempio se ha supporto compatto) allora possiamo, in ciascun punto $x \in M$ considerare il suo flusso φ_t^x; poiché il campo è simplettico, questo flusso definisce un diffeomorfismo di ciascuna foglia S in se stessa, e quindi, per il teorema precedente, induce una famiglia $\{U_S\}_{S\in\tilde{M}}$ di operatori unitarî in $\mathcal{H}_S = L^2(S)$. Ora, se $v \in \mathcal{H}$, e quindi $f_v(S) = v_S \in L^2(S)$ per quasi ogni S:

$$U_S f_v(S) = U_S v_S = f_{Uv}(S)$$

Cioè U è un operatore decomponibile (unitario) su $\mathcal{H}$. Notiamo ad esempio che, se U_X è l'operatore indotto da un campo simplettico completo allora

$$U_{[X,Y]} = U_X U_Y - U_Y U_X$$

Infatti il commutatore di campi corrisponde a quello di flussi.

Esempio. Gli operatori decomponibili, sulle varietà nulle, sono esattamente le funzioni essenzialmente misurabili su $\tilde{M} \cong M$, viste come operatori di moltiplicazione. In generale, se $f : M \longrightarrow \mathbb{C}$ è una funzione essenzialmente misurabile allora definisce un operatore di moltiplicazione in $\mathcal{H}_M$ che è decomponibile: infatti per ogni foglia S poniamo

$$M_f(S)f_v(S) = f(S)f_v(S) = f_{f(S)v}(S)$$

il che fornisce un operatore decomponibile di moltiplicazione: vedremo fra poco che questi operatori di moltiplicazione generano il centro dell'algebra di von Neumann che stiamo per definire.

Il seguente fatto è una proprietà generale degli integrali diretti (cfr. [48, p.1001]):

Lemma 5.4.9 *Se $\{v_\alpha\}$ è un insieme di generatori di $\mathcal{H}_M$ allora $\mathcal{H}_S = \mathcal{H}_S^0$ per quasi ogni $S \in \tilde{M}$, ove $\mathcal{H}_S^0$ è il sottospazio chiuso generato da $\{v_\alpha(S)\}$.*

e consente di dimostrare facilmente la

Proposizione 5.4.10 *Se A è decomponibile allora f_A è unica a meno di insiemi di misura nulla.*

DIMOSTRAZIONE: Sia $\{v_n\}$ un insieme numerabile di generatori di $\mathcal{H}_M$: se f è un'altra funzione che decompone l'operatore A allora

$$f_A(S)f_{v_n}(S) = A(v(S)) = f(S)f_{v_n}(S)$$

quasi ovunque, e quindi, per il lemma, gli operatori $f_A(S)$ e $f(S)$ coincidono a meno di unioni numerabili di insiemi di misura nulla. Se invece A e B sono operatori che ammettono la medesima decomposizione f allora, per ogni $v, w \in \mathcal{H}_M$:

$$\begin{aligned}\langle Av, w\rangle &= \int_{\tilde{M}} \langle f_{Av}(S), f_w(S)\rangle_S dS = \int_{\tilde{M}} \langle f(S)f_v(S), f_w(S)\rangle_S dS \\ &= \int_{\tilde{M}} \langle f_{Bv}(S), f_w(S)\rangle_S dS = \langle Bv, w\rangle\end{aligned}$$

e, per arbitrarietà di v, w: $A = B$ quasi ovunque.

QED

Le seguenti verifiche sono immediate dalla definizione:

Proposizione 5.4.11 *Se A e B sono operatori decomponibili allora anche $aA + bB$, A^*, AB e I lo sono ($a, b \in \mathbb{C}$ e I operatore identico), e le seguenti equazioni sono valide quasi ovunque in $\tilde{M}$:*

(1) $f_{aA+bB} = af_A + bf_B$

(2) $f_{AB} = f_A f_B$

(3) $f_{A^*} = f_A^*$

(4) $f_I(S) = I_S$

In altri termini:

Teorema 5.4.12 *L'insieme degli operatori decomponibili è una sotto-algebra associativa involutiva con identità dell'algebra degli operatori limitati $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.*

Meno evidente è il seguente lemma, la cui dimostrazione è del tutto generale per qualsiasi integrale diretto, e per la quale rimandiamo a [48, p.1004-1005]:

Lemma 5.4.13 *La funzione $S \mapsto ||f_A(S)||$ è essenzialmente limitata, e il suo estremo superiore essenziale è $||A||_{\mathcal{H}_M}$.*

Ricordiamo che un'algebra di von Neumann $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è una sotto-algebra auto-aggiunta fortemente chiusa in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$: il fondamentale teorema del doppio centralizzatore di von Neumann asserisce che un'algebra di von Neumann è caratterizzata dalla condizione algebrica $\mathcal{R} = \mathcal{R}''$ ove, se $X \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è un sottoinsieme, il suo centralizzatore è

$$X' = \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \,|\, \forall B \in X \quad AB = BA\}$$

Il risultato centrale per noi è il seguente teorema di von Neumann, la cui dimostrazione è valida per qualsiasi decomposizione in integrale diretto di spazi di Hilbert, e per la quale pure rimandiamo a [48]:

Teorema 5.4.14 *Se M è una varietà di Poisson allora lo spazio degli operatori decomponibili è un'algebra di von Neumann $\mathcal{V}(M)$.*

L'esempio più elementare di operatore decomponibile si ha nel caso di una varietà nulla: in questo caso ciascuno spazio $\mathcal{H}_S$ è una copia di $\mathbb{C}$, e quindi un operatore decomponibile è semplicemente una famiglia di numeri complessi (visti come operatori di moltiplicazione) con associata una funzione di decomposizione che possiamo identificare con una funzione $f : M \longrightarrow \mathbb{C}$ essenzialmente limitata. Ovviamente l'azione dell'operatore su un elemento dello spazio di Hilbert $\mathcal{H}_M = L^2(M)$ è la moltiplicazione e quindi l'algebra di von Neumann è abeliana in questo caso ed è precisamente $\mathcal{V}(M) = L^\infty(M)$.

All'estremo opposto abbiamo il caso di una varietà simplettica M: dato che $\tilde{M} = \{M\}$ e che $\mathcal{H}_M = L^2(M)$ otteniamo che un operatore decomponibile è esattamente un operatore limitato $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$; cioè $\mathcal{V}(M)$ è in questo caso l'algebra completa degli operatori limitati su uno spazio di Hilbert separabile. Si noti che è un fattore di tipo I_∞.

In generale possiamo dare un criterio geometrico per stabilire quando questa costruzione dà luogo a fattori:

Teorema 5.4.15 *Il centro di $\mathcal{V}(M)$ è la sotto-algebra degli operatori decomponibili diagonalizzabili, cioè degli operatori decomponibili A tali che $f_A(S) = f(S)I_S$ per qualche funzione essenzialmente limitata f e dove I_S è l'operatore identità in $L^2(S)$.*

(cfr. [48, pp.1005–1007]).

Corollario 5.4.16 *$\mathcal{V}(M)$ è un fattore se e solo se M è minimale (cioè ogni sua foglia è densa).*

Dimostrazione: Si tratta di osservare che le uniche funzioni essenzialmente limitate su $\tilde{M}$ sono le costanti nel caso di una fogliazione minimale: allora un operatore diagonalizzabile è sempre il multiplo di una costante, e quindi il centro dell'algebra di von Neumann $\mathcal{V}(M)$ è ridotto alle sole costanti.

QED

Abbiamo già visto come le varietà simplettiche diano luogo a fattori, tutti di tipo I_∞: altri esempi sono le varietà di Poisson regolari $\mathbb{T}^3_\varphi$ con $\varphi \notin \mathbb{Q}$.

Bibliografia

[1] R. Abraham, J. Marsden *Foundations of Mechanics*, Addison–Wesley, New York, 1985.

[2] K.S. Ahluwalia *Fundamentals of Poisson Lie Groups with Applications to the Classical Double*, pre-pubblicazione DAMTP 93-53, `hep-th/9310068`, 1994.

[3] A. Yu. Alekseev, A.Z. Malkin *Symplectic structures associated to Poisson–Lie groups*, Comm. Math. Phys. **162** (1994), 147–173.

[4] V.I. Arnold *Small denominators III. Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics*, Russ. Math. Surveys **18** (1963), 85–191.

[5] V.I. Arnold *Mathematical methods of classical mechanics*, GTM **60**, Springer, New York–Berlin, 1989^2 (trad. dal russo).

[6] M. Audin (ed.) *Holomorphic curves in Symplectic Geometry*, Progr. Math. **118**, Birkhäuser, Basel, 1994.

[7] F.A. Berezin *Some remarks about the associated envelope of a Lie algebra*, Funct. Anal. Appl. **1** (1967), 91–102.

[8] K.H. Bhaskara, K. Rhama *Quadratic Poisson structures*, J. Math. Phys. **32** (1991), 2319–2322.

[9] K.H. Bhaskara, K. Viswanath, *Calculus on Poisson manifolds*, Bull. London Math. Soc. **20**(1988), 68–72.

[10] K.H. Bhaskara, K. Viswanath, *Poisson algebras and Poisson manifolds*, Pitman Res. Notes in Math. **174**, Longman, New-York, 1988.

[11] L. Bianchi *Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni*, E. Spoerri, Pisa, 1903.

[12] R. Bkouche *Idéaux mous d'un anneau commutatif. Applications aux anneaux de fonctions*, C. R. Acad. Sci. Paris **260** (1965), 6496–6498.

[13] J.-L. Brylinski *A differential complex for Poisson manifolds*, J. Differential Geometry **28** (1988), 93–114.

[14] M. Cahen, S. Gutt, C. Ohn, M. Parker *Lie–Poisson groups: remarks and examples*, Lett. in Math. Phys. **19** (1990), 343–353.

[15] M. Cahen, S. Gutt, J. Rawnsley *Nonlinearizability of the Iwasawa Poisson structure*, Lett. Math. Phys. **24** (1992), 79–83.

[16] M. Cahen, S. Gutt, J. Rawnsley *Some Remarks on the Classification of Poisson Lie Groups*,??? AMS, 1994, 1–16.

[17] A. Cannas da Silva, A. Weinstein *Geometric Models for Noncommutative Algebras*, Berkeley, 1998 (pre-pubblicazione da richiedere agli autori).

[18] H. Cartan *Notions d'algébre differentielle*, Coll. de Top. Bruxelles (1950), 15–27.

[19] H. Cartan, S. Eilenberg *Homological Algebra*, Princeton, 1956.

[20] P.R. Chernoff, J.E. Marsden *Properties of Infinite Dimensional Hamiltonian Systems*, Lect. notes in Math. **425**, Springer, New York–Berlin, 1974.

[21] J. Conn *Normal forms for analytic Poisson structures*, Ann. of Math. **119** (1984), 576–601.

[22] J. Conn *Normal forms for smooth Poisson structures*, Ann. of Math. **121** (1985), 565–593.

[23] A. Connes *The von Neumann algebra of a foliation*, in in Lect. Notes in Phys. **80**, Springer, 1978.

[24] A. Connes *Sur la théorie non commutative de l'intégration*, in Lect. Notes in Math. **725**, Springer, 1979.

[25] A. Connes *A survey of foliations and operator algebras*, in Proc. Symposia in Pure Math. R.V. Kadison (ed.), AMS, Providence, 1982.

[26] A. Connes *Non-Commutative Geometry*, Academic Press, New York, 1994.

[27] T. Courant *Dirac manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **319** (1990), 631–661.

[28] T. Courant, A. Weinstein *Beyond Poisson manifolds*, Seminaire sur-rhodanien de géométrie VIII. Travaux en Cours **27**, Hermann, Paris (1988).

[29] P. Dazord, A. Weinstein (Ed.) *Symplectic Geometry, Grupoids and Integrable Systems*, Séminaire Sud-Rhodanien de Géométrie à Berkeley (1989), MSRI Series, Springer, Berlin–New York, 1991.

[30] J. Dieudonné *Elements d'analyse, III*, Gauthier–Villars, Paris, 1970.

[31] P.A.M. Dirac *Generalized Hamiltonian Dynamics*, Can. J. Math. **2** (1950), 129–148.

[32] P.A.M. Dirac *Lectures on Quantum Mechanics*, Belfer Monograph Series **2**, Yeshiva Univ., New York, 1964.

[33] J. Dixmier *Les algebres des operateurs dans les espaces hilbertiennes*, Gauthiers-Villars, Paris, 1957.

[34] I.Ya. Dorfman, I.M. Gel'fand *Hamiltonian Operators and Algebraic Structures related to them*, Funct. Anal. Appl. **13** (1979), 248–262.

[35] V.G. Drinfeld *Hamiltonian structures on Lie groups, Lie bialgebras and the geometric meaning of the classical Yang–Baxter equation*, Soviet Math. Doklady **27** (1983), 68–71.

[36] J. P. Dufour *Linéarisation de certaines structures de Poisson*, J. Differential Geometry **32** (1990), 415–428.

[37] J.P. Dufour, A. Haraki *Rotationelles et structures de Poisson quadratiques*, C. R. Acad. Sci. Paris Série I, Math. **312** (1991), 137–140.

[38] D.R. Farkas, G. Letzter *Ring theory from symplectic geometry*, J. Pure Appl. Alg. **125** (1998), 155-190.

[39] B. Fedosov *Deformation Quantization and Index Theory*, Akademie Verlag, Berlin, 1996.

[40] J. Fuchs *Affine Lie algebras and quantum groups*, Cambridge U.P., 1992.

[41] D.B. Fuks *Cohomology of infinite dimensional Lie algebras*, Consultants Bureau, New York, 1986 (trad. dal russo).

[42] V. Ginzburg *Momentum mappings and Poisson cohomology*, Intern. Journal of Math. **7** (1996), 329–358.

[43] V. Ginzburg, A. Weinsten *Lie–Poisson structure on some Poisson–Lie groups*, Journal A.M.S. **5** (1992), 445–453.

[44] J. Huebschmann *Poisson cohomology and quantization*, J. Reine Angew. Math. **408** (1990), 57–113.

[45] J.E. Humphreys *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, GTM **9**, Springer, New York–Berlin, 1972.

[46] Jacobi *Vorlesungen über Dynamik*, Reimer Verlag, 1864.

[47] R. Jost *Poisson brackets (an unpedagogical lecture)*, Rev. Mod. Phys. **36** (1964), 572–579.

[48] R. Kadison, Ringrose *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras, II*, Academic Press, Orlando, 1986.

[49] M.V. Karasaev, V.P. Maslov *Nonlinear Poisson Brackets. Geometry and Quantization.*, Transl. of Math. Monographs **119**, A.M.S., Providence, 1993 (trad. dal russo).

[50] A.A. Kirillov *Unitary representations of nilpotent Lie groups*, Russ. Math. Surveys **17** (1962), 53–104.

[51] A.A. Kirillov *Elements of the Theory of Representations*, Springer, New York–Berlin, 1976.

[52] A.A. Kirillov *Local Lie algebras*, Russ. Math. Surveys **31** (1976), 55–75.

[53] S. Kobayashi, K. Nomizu *Foundations of Differential Geometry*, Wiley, New York, 1963.

[54] M. Konsevitch *Deformation quantization of Poisson Manifolds, I*, prepubblicazione `q-alg/9709040`, 1997.

[55] B. Konstant *Quantization and Unitary Representations*, Lect. Notes in Math. **570**, Springer, New York–Berlin, 1970, 177–306.

[56] Y. Kosmann-Schwartzbach *Lie bialgebras, Poisson Lie groups and dressing transformations*, Lect. Notes in Phys. **495**, Springer, New York–Berlin, 1997.

[57] J.L. Koszul *Crochet de Schouten–Nijenhuis et cohomologie*, Astérisque (hors série), Soc. Math. de France, 1985, 257–271.

[58] I.S.Krasil'ščikh *Hamiltonian cohomology of canonical algebras*, Soviet. Math. Dokl. **21** (1980) 625–629.

[59] I.S.Krasil'ščikh, V.V. Lychagin, A.M. Vinogradov *Geometry of Jet Spaces and Nonlinear Partial Differential Equations*, Adv. Stud. in Contemp. Math. **1**, Gordon&Breach, New York, 1986.

[60] I.S.Krasil'ščikh, A.M. Vinogradov *What is the Hamiltonian Formalism?*, Russian Math. Surveys **30** (1975), 177–202.

[61] J.-L. Lagrange *Mécanique Analytique*, Chez la Veuve Desaint, Paris, 1811[2].

[62] L.D. Landau, E.M. Lifchitz *Physique théorique, I. Mécanique*, MIR, Moscou, 1982 (trad. dal russo).

[63] P. Libermann, Ch.M. Marle *Symplectic Geometry and Anaytical Mechanics*, Kluwer, Dordrecht, 1987.

[64] A. Lichnerowicz *Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées*, J. Differential Geometry **12** (1977), 253–300.

[65] M.S. Lie *Theorie der Transformationgruppen, II (unter Mitwirkung von F. Engel)*, Teubner, Leipzig, 1890[2].

[66] Z.-J. Liu, M. Qian *Generalized Yang–Baxter equations, Koszul operators and Poisson Lie groups*, J. Differential Geometry **35** (1992), 399–414.

[67] Z.-J. Liu, P. Xu *On quadratic Poisson structures*, Lett. in Math. Phys. **26** (1992) 33–42.

[68] J.-L. Loday *Cyclic Homology*, Springer, New York–Berlin, 1992

[69] J.-L. Lu, T. Ratiu *On the nonlinear convexity theorem of Konstant*, Journal A.M.S. **4** (1991), 349–363.

[70] J.H. Lu, A. Weinstein *Poisson Lie groups, dressing transformations and Bruhat decomposition*, J. Differential Geometry **31** (1990), 501–526.

[71] K. Mackenzie *Lie Groupoids and Lie Algebroids in Differential Geometry*, London Math. Soc. Lectures Notes Series **124**, Cambridge U.P., 1987.

[72] J.E. Marsden, T.S. Ratiu, *Reduction of Poisson manifolds*, Lett. Math. Phys. **11** (1986), 161-170.

[73] J.E. Marsden, T.S. Ratiu, *Introduction to Mechanics and Symmetry*, Springer, New York–Berlin, 1994.

[74] J.E. Marsden, A. Weinstein *Reduction of symplectic manifolds with symmetry*, Rep. Math. Phys. **5** (1974), 121–130.

[75] D. McDuff, D. Salamon *An introduction to symplectic topology*, Oxford U.P., 1995.

[76] C.C. Moore, C. Schochet *Global Analysis on Foliates Spaces*, MSRI Publ., Springer, New York–Berlin, 1988.

[77] J. Moser *On the volume element of a manifold*, Trans. Amer. Math. Soc. **120** (1965), 280–296.

[78] N. Nakanishi *Poisson cohomology of Poisson quadratic structures*, Publ. RIMS **33** (1997), 73–89.

[79] J. von Neumann *On rings of operators. Reduction theory*, Ann. of Math. **50** (1949), 401–485.

[80] P.J. Olver *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, GTM **107**, Springer, New York–Berlin, 1986.

[81] W. Pauli *On the Hamiltonian structure of non-local field theory*, Nuovo Cimento **10** (1953), 648–667.

[82] S.-D. Poisson *Mémoire sur la variation des costantes arbitraires dans les questions de Mécanique*, Journ. de l'Ecole Politecnique **8** (1809) pp.266–344.

[83] L.S. Pontriagin *Topological Groups*, Princeton, 1939 (trad. dal russo).

[84] M.M. Postnikov *Lie groups and Lie algebras*, MIR, Moscow, 1985 (trad. dal russo).

[85] B.L. Reinhart *Differential Geometry of Foliations*, Springer, Berlin–New York, 1983.

[86] N. Reshetikhin, A.A. Voronov, A. Weinstein *Semiquantum geometry*, Berkeley, 1996 (pre-pubblicazione da richiedere agli autori).

[87] A.G. Reyman, M.A. Semenov-Tian-Shansky *Group-Theoretical Methods in the Theory of Finite-Dimensional Integrable Systems*, in V.I. Arnol'd, S.P. Novikov (Ed.) *Dynamical Systems, VII*, Encyclopedy of Mathematical Sciences **16**, 116–258, trad. dal russo.

[88] G. de Rham *Variétés différentiables*, Hermann, Paris, 1955.

[89] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1966^3.

[90] M.A. Semenov-Tian-Shansky *What is a Classical R-Matrix?*, Funct. Anal. Appl. **17** (1983), 259–272.

[91] M.A. Semenov-Tian-Shansky *Dressing transformations and Poisson group actions*, Publ. RIMS **21** (1985), 1237–1260.

[92] M.A. Semenov-Tian-Shansky *Poisson groups and Dressing Transformations*, J. of Soviet Math. **46** (1989), 1641–1657.

[93] M.A. Semenov-Tian-Shansky *Poisson–Lie groups, quantum duality and the twisted quantum double*, Theor. Math. Phys. **93** (1992), 302–329.

[94] J.-P. Serre *Lie Algebras and Lie Groups*, Lect. Notes in Math. **1500**, Springer, New York–Berlin, 1992.

[95] J. Sniatycki *Dirac brackets in geometric dynamics*, Ann. Inst. H.Poincaré **20** (1974), 365–372.

[96] J.-M. Souriau *Structure des systèmes dynamiques*, Dunoud, Paris, 1970.

[97] N. Steenrod *The topology of fibre bundles*, Princeton, 1951.

[98] P. Stefan *Accessible sets, orbits and foliations with singularities*, Proc. London Math. Soc. **29** (1974), 699–713.

[99] H.J. Sussmann *Orbits of families of vector fields and integrability of distributions*, Trans. Amer. Math. Soc. **170** (1973), 171–188.

[100] R.G. Swan *Vector Bundles and Projective Modules*, Trans. Amer. Math. Soc. **105** (1962), 264–277.

[101] F. Treves, *Topological vector spaces, distributions and kernels*, Academic Press, New York, 1967.

[102] I. Vaisman, *Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds*, Progr. Math. **118**, Birkhäuser, Basel, 1994.

[103] V.P. Viflyantsev *Frobenius theorem for differential systems with singularities*, Vestnik Moskow. Univ. **3** (1980), 11–14.

[104] A. Weinstein *The local structure of Poisson manifolds*, J. Differential Geometry **18** (1983) 523–557.

[105] A. Weinstein *Poisson structures and Lie algebras*, Astérisque (hors série), Soc. Math. de France, 1985, 421–434.

[106] A. Weinstein *Symplectic groupoids and Poisson manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. **16** (1987), 101–104.

[107] A. Weinstein *Poisson geometry of the principal series and non-linearizable structure*, J. Differential Geometry **25** (1987), 55–73.

[108] A. Weinstein *Coisotropic calculus and Poisson groupoids*, J. Math. Soc. Japan **40** (1988), 705–727.

[109] A. Weinstein *Some remarks on dressing transformations*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA **35** (1988), 163–167.

[110] A. Weinstein *The modular automorphism group of a Poisson manifold*, J. Geom. Phys. **23** (1997), 379–394.

[111] P. Xu *Morita equivalence of Poisson manifolds*, Comm. Math. Phys. **142** (1991), 493–509.

[112] P. Xu *Poisson cohomology of regular Poisson manifolds*, Ann. Inst. Fourier Grenoble **42** (1992), 967-988.

[113] P. Xu *Noncommutative Poisson algebras*, Amer. J. Math. **116** (1994), 101–125.

Indice analitico