

Università degli Studi di Milano

---

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI  
Corso di Laurea in Matematica



ELABORATO FINALE

## Il formalismo dei blossom nel CAD

Candidato:  
**Federica Brunero**  
Matricola 723044

Relatore:  
**Prof. Alberto Alzati**

---

Anno Accademico 2009–2010

# Indice

Introduzione . . . . .	1
<b>1 I blossom e le curve di Bézier</b>	<b>4</b>
1.1 Primi concetti . . . . .	4
1.2 Proprietà dei blossom e formula di Leibniz . . . . .	6
1.3 L'algoritmo di de Casteljau . . . . .	8
1.4 Proprietà delle curve di Bézier . . . . .	16
1.5 Derivate di curve di Bézier . . . . .	19
1.6 La proprietà di suddivisione . . . . .	24
1.7 Il legame tra blossom e polari . . . . .	27
1.8 L'innalzamento di grado . . . . .	30
<b>2 Le superfici di Bézier</b>	<b>35</b>
2.1 Definizione classica di una superficie di Bézier . . . . .	35
2.2 Il prodotto tensore blossom . . . . .	38
2.3 Definizione di una superficie di Bézier tramite blossom . . . . .	40
2.4 Alcune proprietà . . . . .	41
2.5 Curve di Bézier su una superficie di Bézier . . . . .	44
<b>3 I triangoli di Bézier</b>	<b>48</b>
3.1 L'algoritmo di de Casteljau per triangoli di Bézier . . . . .	48
3.2 Proprietà dei triangoli di Bézier . . . . .	52
3.3 Blossom triangolari . . . . .	53
3.4 Formula di Leibniz nel caso triangolare . . . . .	58
3.5 I polinomi di Bernstein nel caso triangolare . . . . .	61

---

3.6	Derivate direzionali per triangoli di Bézier . . . . .	66
3.7	La proprietà di suddivisione per triangoli di Bézier . . . . .	74
3.8	Differenziabilità e superfici composte . . . . .	76
3.9	L'innalzamento di grado per triangoli di Bézier . . . . .	79
	<b>Bibliografia</b>	<b>83</b>

# Introduzione

Il formalismo dei blossom fu introdotto per la prima volta da Ramshaw in [3] e permise di presentare in modo elegante ed efficace alcuni dei principali algoritmi usati in CAGD, in particolare quelli riguardanti le spline. Tuttavia, lo scopo di questa trattazione è di sviluppare, tramite la teoria dei blossom, altri argomenti, quali le curve, le superfici e i triangoli di Bézier.

In questo lavoro ci siamo posti l'obiettivo di affrontare gli aspetti teorico-matematici di tali argomenti, utilizzando quanto più possibile la terminologia dei blossom ed illustrando eventuali parallelismi con la trattazione classica: il lavoro mette in evidenza quanto i blossom talvolta semplifichino il linguaggio e alcune delle dimostrazioni relative alla teoria di Bézier rispetto alla metodologia classica.

Ogni capitolo è grosso modo strutturato così: inizialmente viene richiamata brevemente la definizione classica dell'oggetto in questione, poi viene introdotta la definizione di funzione blossom adatta al caso in oggetto, infine vengono elencate le principali proprietà di curve, superfici e triangoli di Bézier la cui presentazione, tramite il formalismo dei blossom, risulta semplificata. Per molte di esse viene fornito un paragone dettagliato con la presentazione classica.

Nel Capitolo 1, dopo aver definito le funzioni blossom in generale e averne enunciato le proprietà, abbiamo introdotto e dimostrato la formula di Leibniz, che è uno degli strumenti essenziali per l'uso del formalismo dei blossom, e l'importante algoritmo di de Casteljau, sia nella maniera classica che tramite la tecnica dei blossom; per fare ciò abbiamo definito e utilizzato i

polinomi di Bernstein. Abbiamo poi illustrato la teoria delle curve di Bèzier, analizzandone alcune principali proprietà. In particolare abbiamo dato due espressioni equivalenti delle derivate di curve di Bézier e abbiamo illustrato la proprietà di suddivisione applicata alla ricerca di punti di intersezione tra una retta e una curva di Bézier nel piano. Abbiamo poi introdotto il concetto di *polare* di una curva di Bézier e ne abbiamo messo in evidenza le caratteristiche. Infine, abbiamo parlato dell'innalzamento di grado di una curva: questa è una tecnica che si può adottare sempre e che permette di interpretare una curva di grado  $n$  come una di grado  $n + 1$ , aumentando il numero dei punti del suo poligono di controllo, il che garantisce una maggiore flessibilità alla curva stessa.

Nel Capitolo 2 siamo passati all'analisi delle superfici di Bézier, trattando in particolare quegli argomenti che ricavano dei vantaggi dall'uso dei blossom. Dopo aver richiamato la classica definizione di superficie di Bézier, abbiamo definito in modo opportuno i prodotti tensoriali di funzioni blossom usati in questo contesto e illustrato le loro proprietà fondamentali. Abbiamo organizzato il discorso in modo da ricalcare quasi sempre gli stessi argomenti discussi per le curve di Bézier: abbiamo così parlato di derivate di superfici di Bézier, della proprietà di suddivisione e di prima polare di una superficie di Bézier. Abbiamo poi dedicato un paragrafo alla descrizione di come un segmento sul dominio di un patch tensoriale venga mappato in una curva sulla superficie di Bézier corrispondente e di come tale curva sia proprio una curva di Bézier. Il Capitolo 2 funge da cardine tra il Capitolo relativo alle curve di Bézier e quello riguardante i triangoli di Bézier e permette di introdurre gradatamente la generalizzazione al caso di superfici dei concetti introdotti per le curve.

Nel Capitolo 3 abbiamo affrontato lo studio dei triangoli di Bézier, cioè la più naturale estensione alle superfici delle curve di Bézier: essi sono infatti molto utili per modellare superfici complesse più di quanto lo siano le tradizionali superfici di Bézier. In questo Capitolo vengono presentate quasi tutte le principali dimostrazioni sia con la tecnica blossom sia con la terminologia

---

standard, in modo da sottolineare la semplicità delle prime. Abbiamo riconsiderato l'algoritmo di de Casteljau, adattandolo al caso dei triangoli: per fare ciò abbiamo fatto uso di coordinate baricentriche, allo scopo di identificare un punto all'interno di un dominio triangolare, dati i suoi vertici, in un modo più adatto all'uso di domini triangolari. Dopo aver dato una rapida scorsa alle proprietà dei triangoli di Bézier, del tutto analoghe a quelle già analizzate nel Capitolo 2 per le superfici, siamo passati alla definizione dei blossom "triangolari", che differiscono da quelli introdotti nei precedenti Capitoli, e alle loro proprietà. Dopodichè, abbiamo analizzato una versione della formula di Leibniz per il caso triangolare e dato un'opportuna nuova definizione dei polinomi di Bernstein per i triangoli di Bézier. Nella parte conclusiva del Capitolo abbiamo considerato quelle proprietà relative alle curve di Bézier che avevamo illustrato nel Capitolo 1. Abbiamo così parlato di derivate direzionali in analogia con il paragrafo sulle derivate di curve di Bézier, di suddivisione nel caso triangolare in modo da riprendere la proprietà di suddivisione discussa precedentemente per le curve e infine di innalzamento di grado così come abbiamo fatto per le curve di Bézier. Un ulteriore paragrafo è dedicato a un argomento di particolare interesse per i triangoli di Bézier, cioè quello delle superfici composte e delle condizioni per saldare con continuità di classe  $C^r$  due triangoli di Bézier adiacenti.

Con questo elaborato abbiamo cercato quindi di dare una panoramica quanto più completa sul formalismo dei blossom per il CAGD e di sottolineare l'importanza che ha quest'ultimo nell'affrontare molti aspetti teorici di tale disciplina.

# Capitolo 1

## I blossom e le curve di Bézier

### 1.1 Primi concetti

Iniziamo a introdurre il concetto di blossom a partire dal caso di una retta nello spazio affine tridimensionale. Questa è definita da una funzione  $F : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^3$ , dove  $\mathbb{A}$  è un campo, e le sue equazioni parametriche hanno in generale la seguente forma:

$$\begin{cases} x_1(t) = a_1t + b_1 \\ x_2(t) = a_2t + b_2 \\ x_3(t) = a_3t + b_3 \end{cases}$$

Si osservi che ogni funzione  $t \mapsto a_i t + b_i$  è affine, per  $i = 1, 2, 3$ . Perciò  $F$  stessa è una mappa affine. Dati  $r$  e  $s$  in  $\mathbb{A}$ , dove  $r \neq s$ , è possibile scrivere ogni  $t \in \mathbb{A}$  in modo unico come  $t = (1 - \lambda)r + \lambda s$ . Si ha dunque:

$$t = r + \lambda(s - r),$$

e perciò:

$$\lambda = \frac{t - r}{s - r} \quad e \quad 1 - \lambda = \frac{s - t}{s - r}$$

Poichè  $F$  è affine, abbiamo che

$$\begin{aligned} F(t) &= F((1 - \lambda)r + \lambda s) \\ &= (1 - \lambda)F(r) + \lambda F(s). \end{aligned}$$

Ciò significa che  $F(t)$  è completamente determinato dai due punti  $F(r)$  e  $F(s)$  e dal rapporto di interpolazione  $\lambda$ . Si osserva facilmente che tale punto appartiene alla retta passante per  $F(r)$  ed  $F(s)$ .

Nel seguito, per noi,  $\mathbb{A}$  sarà sempre il campo  $\mathbb{R}$ . A questo punto, vorremo generalizzare tale idea per determinare  $F(t)$  su una curva polinomiale  $F$ , tramite una serie di passi di interpolazione da un insieme finito di punti relativi alla curva  $F$ .

*Esempio 1.* Mostriamo come trasformare un polinomio quadratico in una mappa biaffine.

Consideriamo il polinomio

$$F(X) = X^2 + 2X - 3.$$

Si osserva che la funzione in due variabili

$$f_1(x_1, x_2) = x_1x_2 + 2x_1 - 3$$

è tale che  $\forall X \in \mathbb{R}$

$$f_1(X, X) = F(X).$$

Inoltre,  $f_1$  è biaffine, cioè affine in entrambi i suoi argomenti.

Si noti che anche

$$f_2(x_1, x_2) = x_1x_2 + 2x_2 - 3$$

è biaffine e tale che  $f_2(X, X) = F(X) \forall X \in \mathbb{R}$ . Vorremmo tuttavia garantire che vi sia un'unica funzione biaffine  $f$  tale che  $f(X, X) = F(X) \forall X \in \mathbb{R}$ . Per fare ciò richiediamo che  $f$  sia simmetrica, cioè tale che

$$f(x_1, x_2) = f(x_2, x_1) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Per rendere  $f_1$  simmetrica, basta porre

$$f(x_1, x_2) = \frac{f_1(x_1, x_2) + f_1(x_2, x_1)}{2}.$$

La funzione simmetrica e biaffine trovata si dice *blossom* di  $F$ .





## 1.2 Proprietà dei blossom e formula di Leibniz

**Definizione 1** (Blossom). Un blossom è una funzione a  $n$  variabili  $\mathbf{b} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{E}^2$  (o  $\mathbb{E}^3$ ) che soddisfa le proprietà seguenti:

- *Simmetria:*

$$\mathbf{b}[t_1, \dots, t_n] = \mathbf{b}[\pi(t_1, \dots, t_n)]$$

dove  $\pi(t_1, \dots, t_n)$  indica una permutazione degli argomenti  $t_1, \dots, t_n$ .

- *Multiaffinità:*

$$\mathbf{b}[(\alpha r + \beta s), *] = \alpha \mathbf{b}[r, *] + \beta \mathbf{b}[s, *]$$

con  $\alpha + \beta = 1$ . Poichè si richiede la simmetria, questa proprietà vale per tutti gli argomenti di  $\mathbf{b}$ .

- *Diagonalità:* Se  $t_1 = \dots = t_n = t$ , si ottiene una curva polinomiale. Useremo nel seguito la notazione

$$\mathbf{b}[t, \dots, t] = \mathbf{b}[t^{<n>}]$$

se  $t$  è ripetuto  $n$  volte.

I blossom possono avere anche argomenti vettoriali; per esempio

$$\mathbf{b}[\vec{h}, r, s] = \mathbf{b}[b, r, s] - \mathbf{b}[a, r, s] \quad (1.1)$$

dove  $\vec{h} = b - a$ .

Ricaviamo ora una formula che sarà molto utile nella nostra trattazione.

**Proposizione 1** (Formula di Leibniz).

$$\mathbf{b}[(\alpha r + \beta s)^{<n>}] = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \alpha^i \beta^{n-i} \mathbf{b}[r^{<i>}, s^{<n-i>}]. \quad (1.2)$$

con  $\alpha, \beta, r, s \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{N}$ .

*Dimostrazione.* Si procede per induzione su  $n \geq 1$ . Se  $n = 1$  la formula è verificata, perchè corrisponde alla proprietà di multiaffinità.

Nell'ipotesi induttiva supponiamo che la formula valga per  $n$ . Dimostriamo che vale anche per  $n + 1$ . Utilizzando prima la multiaffinità e poi il passo induttivo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}[(\alpha r + \beta s)^{\langle n+1 \rangle}] &= \mathbf{b}[(\alpha r + \beta s)^{\langle n \rangle}, \alpha r + \beta s] \\
&= \alpha \mathbf{b}[(\alpha r + \beta s)^{\langle n \rangle}, r] + \beta \mathbf{b}[(\alpha r + \beta s)^{\langle n \rangle}, s] \\
&= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \alpha^i \beta^{n-i} \mathbf{b}[r^{\langle i \rangle}, s^{\langle n-i \rangle}, r] + \\
&\quad + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \alpha^i \beta^{n-i} \beta \mathbf{b}[r^{\langle i \rangle}, s^{\langle n-i \rangle}, s] \\
&= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \alpha^{i+1} \beta^{n-i} \mathbf{b}[r^{\langle i+1 \rangle}, s^{\langle n-i \rangle}] \\
&\quad + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \alpha^i \beta^{n+1-i} \mathbf{b}[r^{\langle i \rangle}, s^{\langle n+1-i \rangle}].
\end{aligned}$$

Trasformando l'indice della prima somma con  $i \rightarrow i - 1$  e aggiungendo l'( $n + 1$ )-esimo termine alla seconda, si ottiene:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} \alpha^i \beta^{n+1-i} \mathbf{b}[r^{\langle i \rangle}, s^{\langle n+1-i \rangle}] \\
&+ \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n}{i} \alpha^i \beta^{n+1-i} \mathbf{b}[r^{\langle i \rangle}, s^{\langle n+1-i \rangle}].
\end{aligned}$$

Si osservi che aggiungere l'( $n + 1$ )-esimo termine alla seconda somma non modifica il risultato finale. Infatti  $\binom{n}{n+1} = \binom{n}{-1} = 0$ . Ora, facendo partire la prima somma da  $i = 0$ , il termine aggiunto è ancora nullo. Poichè vale la seguente uguaglianza

$$\binom{n+1}{i} = \binom{n}{i-1} + \binom{n}{i},$$

possiamo unire le due somme e ottenere

$$\mathbf{b}[(\alpha r + \beta s)^{\langle n+1 \rangle}] = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} \alpha^i \beta^{n+1-i} \mathbf{b}[r^{\langle i \rangle}, s^{\langle n+1-i \rangle}],$$

che è ciò che volevamo dimostrare.  $\square$

### 1.3 L'algoritmo di de Casteljau

I blossom sono stati utilizzati negli ultimi anni per la reinterpretazione delle curve di Bézier e dell'algoritmo di de Casteljau. Illustriamo innanzitutto l'idea di tale algoritmo.

Il punto di partenza è il poligono di controllo: esso rappresenta un insieme di punti  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$  tutti distinti, messi in posizione generale (per avere una certa regolarità della curva) e di cui è rilevante l'ordine.

Per  $k = 1$  il poligono di controllo  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1$  è costituito solo da due punti e la curva di Bézier relativa ad esso è il segmento orientato  $\overrightarrow{\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1}$ , cioè si ha  $\mathbf{b}(t) = (1 - t)\mathbf{b}_0 + t\mathbf{b}_1$  (si veda la Figura 1.1).

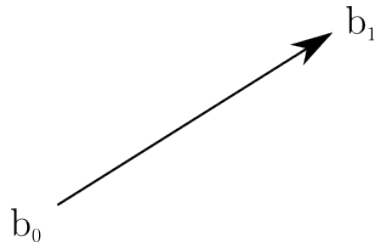


Figura 1.1: *Curva di Bézier di grado 1*

Per  $k = 2$  si ha un poligono di controllo formato da tre punti  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ . Per arrivare a definire la curva  $\mathbf{b}(t)$  occorre eseguire due passi dell'algoritmo ricorsivo di de Casteljau, cioè:

$$\begin{array}{l} \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_0^1(t) \\ \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{b}_1^1(t) \quad \mathbf{b}_0^2(t) \end{array}$$

dove

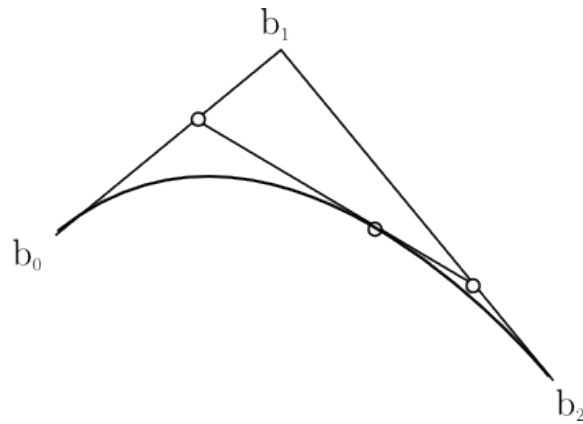


Figura 1.2: Curva di Bézier di grado 2

$$\mathbf{b}_0^1(t) = (1-t)\mathbf{b}_0 + t\mathbf{b}_1$$

$$\mathbf{b}_1^1(t) = (1-t)\mathbf{b}_1 + t\mathbf{b}_2$$

$$\mathbf{b}(t) = \mathbf{b}_0^2(t) = (1-t)\mathbf{b}_0^1(t) + t\mathbf{b}_1^1(t).$$

Con qualche sostituzione si ottiene perciò:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(t) &= (1-t)[(1-t)\mathbf{b}_0 + t\mathbf{b}_1] + t[(1-t)\mathbf{b}_1 + t\mathbf{b}_2] \\ &= (1-t)^2\mathbf{b}_0 + 2(1-t)t\mathbf{b}_1 + t^2\mathbf{b}_2. \end{aligned}$$

Graficamente, l'algoritmo di de Casteljau si può esprimere come in Figura 1.2.

Per  $k = 3$ , partendo da quattro punti del poligono di controllo e procedendo analogamente a quanto già fatto, si avranno i seguenti passi:

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{b}_0 & & & \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_0^1(t) & & \\ \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1^1(t) & \mathbf{b}_0^2(t) & \\ \mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_2^1(t) & \mathbf{b}_1^2(t) & \mathbf{b}_0^3(t). \end{array} \quad (1.3)$$

Si ottiene così

$$\mathbf{b}(t) = \mathbf{b}_0^3(t) = (1-t)^3\mathbf{b}_0 + 3(1-t)^2t\mathbf{b}_1 + 3(1-t)t^2\mathbf{b}_2 + t^3\mathbf{b}_3. \quad (1.4)$$

Introduciamo a questo punto un'utile

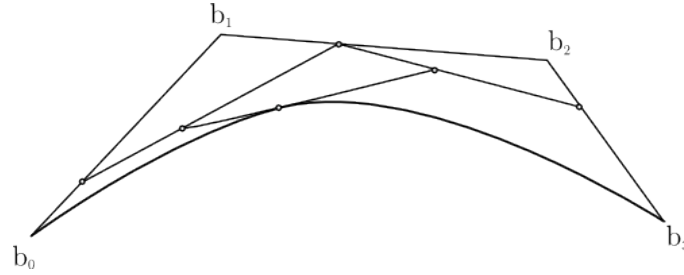


Figura 1.3: Curva di Bézier di grado 3

**Definizione 2.** I polinomi di Bernstein di grado  $n$  sono definiti come

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i, \quad (1.5)$$

per ogni  $i = 0, 1, \dots, n$  e  $t \in [0, 1]$ . Se  $i < 0$  o  $i > n$  i polinomi di Bernstein sono nulli per convenzione.

Essi soddisfano alla seguente proprietà:

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1, \quad \forall t \in [0, 1]. \quad (1.6)$$

In generale, il passo induttivo a livello  $r$  dell'algoritmo di de Casteljau è

$$\mathbf{b}_i^r(t) = (1-t)\mathbf{b}_i^{r-1}(t) + t\mathbf{b}_{i+1}^{r-1}(t), \quad (1.7)$$

per  $r = 1, \dots, n$ . Inoltre, grazie alla Definizione 2, per un  $n$  qualunque, si ha

$$\mathbf{b}(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \mathbf{b}_i, \quad (1.8)$$

dove i  $\mathbf{b}_i$  sono gli  $n + 1$  punti del poligono di controllo.

Dopo aver illustrato l'algoritmo di de Casteljau nella maniera classica, passiamo ora alla rilettura tramite la tecnica dei blossom. Esamineremo in dettaglio il caso  $n = 3$ , lasciando al lettore le naturali generalizzazioni. Ricaveremo una funzione blossom per  $n = 3$  che, valutata in  $t_1 = t_2 = t_3 = t$ , corrisponda all'espressione di  $\mathbf{b}(t)$  ottenuta dall'algoritmo di de Casteljau in (1.4). Passeremo poi ad osservare che questa definizione è l'unica per  $\mathbf{b}[t_1, t_2, t_3]$  che permetta di ricondursi alla (1.4).

Analizziamo quindi il caso cubico; sapendo che  $\mathbf{b}[t] = (1-t)\mathbf{b}[0] + t\mathbf{b}[1]$ , si ha che

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}[t_1, t_2, t_3] &= (1-t_1)\mathbf{b}[0, t_2, t_3] + t_1\mathbf{b}[1, t_2, t_3] \\
&= (1-t_1)\left[(1-t_2)\mathbf{b}[0, 0, t_3] + t_2\mathbf{b}[0, 1, t_3]\right] \\
&\quad + t_1\left[(1-t_2)\mathbf{b}[1, 0, t_3] + t_2\mathbf{b}[1, 1, t_3]\right] \\
&= (1-t_1)(1-t_2)\left[(1-t_3)\mathbf{b}[0, 0, 0] + t_3\mathbf{b}[0, 0, 1]\right] \\
&\quad + (1-t_1)t_2\left[(1-t_3)\mathbf{b}[0, 1, 0] + t_3\mathbf{b}[0, 1, 1]\right] \\
&\quad + t_1(1-t_2)\left[(1-t_3)\mathbf{b}[1, 0, 0] + t_3\mathbf{b}[1, 0, 1]\right] \\
&\quad + t_1t_2\left[(1-t_3)\mathbf{b}[1, 1, 0] + t_3\mathbf{b}[1, 1, 1]\right] \\
&= (1-t_1)(1-t_2)(1-t_3)\mathbf{b}[0, 0, 0] \\
&\quad + \left[(1-t_1)(1-t_2)t_3 + (1-t_1)t_2(1-t_3) + t_1(1-t_2)(1-t_3)\right]\mathbf{b}[0, 0, 1] \\
&\quad + \left[(1-t_1)t_2t_3 + t_1(1-t_2)t_3 + t_1t_2(1-t_3)\right]\mathbf{b}[0, 1, 1] \\
&\quad + t_1t_2t_3\mathbf{b}[1, 1, 1].
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Questa è a tutti gli effetti una funzione blossom: è chiaramente simmetrica e multiaffine, inoltre vale la proprietà di diagonalità. Infatti, ponendo  $t_1 = t_2 = t_3 = t$ , ci si riconduce alla funzione polinomiale

$$\mathbf{b}[t, t, t] = (1-t)^3\mathbf{b}[0, 0, 0] + 3t(1-t)^2\mathbf{b}[0, 0, 1] + 3t^2(1-t)\mathbf{b}[0, 1, 1] + t^3\mathbf{b}[1, 1, 1], \tag{1.10}$$

e, ponendo  $\mathbf{b}_0 = \mathbf{b}[0, 0, 0]$ ,  $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}[0, 0, 1]$ ,  $\mathbf{b}_2 = \mathbf{b}[0, 1, 1]$  e  $\mathbf{b}_3 = \mathbf{b}[1, 1, 1]$ , la (1.10) diventa proprio la (1.4).

Vogliamo ora verificare che la funzione blossom (1.9) è l'unica che riconduce alla (1.4). Per farlo, trasformiamo in funzioni blossom ciascuna funzione del diagramma (1.3) e applichiamo l'algoritmo di de Casteljau illustrato

prima:

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_0^1(t) &= (1-t)\mathbf{b}_0 + t\mathbf{b}_1 \Rightarrow \mathbf{b}_0^1[t_1] = (1-t_1)\mathbf{b}_0 + t_1\mathbf{b}_1 \\
\mathbf{b}_1^1(t) &= (1-t)\mathbf{b}_1 + t\mathbf{b}_2 \Rightarrow \mathbf{b}_1^1[t_1] = (1-t_1)\mathbf{b}_1 + t_1\mathbf{b}_2 \\
\mathbf{b}_2^1(t) &= (1-t)\mathbf{b}_2 + t\mathbf{b}_3 \Rightarrow \mathbf{b}_2^1[t_1] = (1-t_1)\mathbf{b}_2 + t_1\mathbf{b}_3 \\
\mathbf{b}_0^2(t) &= (1-t)\mathbf{b}_0^1(t) + t\mathbf{b}_1^1(t) \Rightarrow \mathbf{b}_0^2[t_1, t_2] = (1-t_2)\mathbf{b}_0^1[t_1] + t_2\mathbf{b}_1^1[t_1] \\
\mathbf{b}_1^2(t) &= (1-t)\mathbf{b}_1^1(t) + t\mathbf{b}_2^1(t) \Rightarrow \mathbf{b}_1^2[t_1, t_2] = (1-t_2)\mathbf{b}_1^1[t_1] + t_2\mathbf{b}_2^1[t_1] \\
\mathbf{b}_0^3(t) &= (1-t)\mathbf{b}_0^2(t) + t\mathbf{b}_1^2(t) \Rightarrow \mathbf{b}_0^3[t_1, t_2, t_3] = (1-t_3)\mathbf{b}_0^2[t_1, t_2] + t_3\mathbf{b}_1^2[t_1, t_2]
\end{aligned}$$

Lasciamo al lettore la semplice dimostrazione che queste trasformazioni in blossom sono le uniche possibili per le  $\mathbf{b}_i^r(t)$  di (1.3) se vogliamo che la proprietà di diagonalità riproduca le curve di Bézier di grado 1 e 2. Sostituendo le varie funzioni blossom all'interno dell'ultima, si vede facilmente che la funzione ottenuta coincide con la (1.9); si può quindi concludere che il diagramma

$$\begin{array}{cccc}
\mathbf{b}_0 & & & \\
\mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_0^1[t_1] & & \\
\mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1^1[t_1] & \mathbf{b}_0^2[t_1, t_2] & \\
\mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_2^1[t_1] & \mathbf{b}_1^2[t_1, t_2] & \mathbf{b}_0^3[t_1, t_2, t_3]
\end{array} \tag{1.11}$$

e la (1.9) sono equivalenti; perciò la funzione blossom trovata è l'unica che produce l'algoritmo di de Casteljau.

Il blossom risultante  $\mathbf{b}_0^3[t_1, t_2, t_3]$  in (1.11) è ora una funzione di tre variabili indipendenti e definita in  $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ .

Poichè abbiamo identificato l'unica funzione blossom che equivale all'algoritmo di de Casteljau applicato a partire da (1.3), è possibile costruire un diagramma analogo a quest'ultimo utilizzando la notazione dei blossom: è sufficiente valutare la funzione blossom in questione su opportuni sottoinsiemi di  $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ . Vediamo concretamente in che senso.

Iniziamo con  $[t_1, t_2, t_3] = [0, 0, t]$ ; facendo riferimento a (1.11) si ottiene:

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{b}_0 & & & \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_0 & & \\ \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_0 & \\ \mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_0^1[t] \end{array} \Rightarrow \mathbf{b}[0, 0, t] = \mathbf{b}_0^1[t].$$

Per  $[t_1, t_2, t_3] = [0, t, 1]$ , analogamente, si trova:

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{b}_0 & & & \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_0 & & \\ \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_0^1[t] & \\ \mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1^1[t] & \mathbf{b}_0^1[t] \end{array} \Rightarrow \mathbf{b}[0, t, 1] = \mathbf{b}_1^1[t].$$

Per  $[t_1, t_2, t_3] = [t, 1, 1]$ :

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{b}_0 & & & \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_0^1[t] & & \\ \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1^1[t] & \mathbf{b}_0^1[t] & \\ \mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_2^1[t] & \mathbf{b}_1^1[t] & \mathbf{b}_0^1[t] \end{array} \Rightarrow \mathbf{b}[t, 1, 1] = \mathbf{b}_2^1[t].$$

Per  $[t_1, t_2, t_3] = [0, t, t]$ :

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{b}_0 & & & \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_0 & & \\ \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_0^1[t] & \\ \mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1^1[t] & \mathbf{b}_0^2[t] \end{array} \Rightarrow \mathbf{b}[0, t, t] = \mathbf{b}_0^2[t].$$

Per  $[t_1, t_2, t_3] = [t, t, 1]$ :

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{b}_0 & & & \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_0^1[t] & & \\ \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1^1[t] & \mathbf{b}_0^2[t] & \\ \mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_2^1[t] & \mathbf{b}_1^2[t] & \mathbf{b}_0^2[t] \end{array} \Rightarrow \mathbf{b}[t, t, 1] = \mathbf{b}_1^2[t].$$

Per  $[t_1, t_2, t_3] = [t, t, t]$ :

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{b}_0 & & & \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_0^1[t] & & \\ \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1^1[t] & \mathbf{b}_0^2[t] & \\ \mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_2^1[t] & \mathbf{b}_1^2[t] & \mathbf{b}_0^3[t] \end{array} \Rightarrow \mathbf{b}[t, t, t] = \mathbf{b}_0^3[t].$$



Possiamo in questo modo scrivere lo schema completo relativo all'algoritmo di de Casteljau come:

$$\begin{array}{cccc}
 \mathbf{b}_0 & & & \\
 \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}[0, 0, t] & & \\
 \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}[0, t, 1] & \mathbf{b}[0, t, t] & \\
 \mathbf{b}_3 & \mathbf{b}[t, 1, 1] & \mathbf{b}[t, t, 1] & \mathbf{b}[t, t, t]
 \end{array}$$

Questo diagramma è equivalente a (1.3) per l'unicità della funzione blossom in uso.

Tutte le precedenti dimostrazioni si possono generalizzare al caso di curve di Bézier di grado superiore; esiste una funzione blossom  $\mathbf{b}$  di  $n$  variabili per cui la proprietà di diagonalità produce una curva di Bézier di ordine  $n$  i cui punti del poligono di controllo sono

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{b}[0^{\langle n-i \rangle}, 1^{\langle i \rangle}] \quad \text{per } i = 0, \dots, n, \quad (1.12)$$

dove indichiamo con questa notazione che l'argomento 0 del blossom è ripetuto  $n - i$  volte e che 1 è ripetuto  $i$  volte. Le altre funzioni  $\mathbf{b}_i^r(t)$  dell'algoritmo di de Casteljau saranno del tipo

$$\mathbf{b}_i^r(t) = \mathbf{b}[0^{\langle n-r-i \rangle}, t^{\langle r \rangle}, 1^{\langle i \rangle}] \quad \text{per } r = 0, \dots, n \text{ e } i = 0, \dots, n - r. \quad (1.13)$$

Si può dunque riformulare il passo induttivo (1.7) dell'algoritmo di de Casteljau tramite il formalismo dei blossom:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}[0^{\langle n-r-i \rangle}, t^{\langle r \rangle}, 1^{\langle i \rangle}] &= (1 - t)\mathbf{b}[0^{\langle n-r-i+1 \rangle}, t^{\langle r-1 \rangle}, 1^{\langle i \rangle}] \\
 &\quad + t\mathbf{b}[0^{\langle n-r-i \rangle}, t^{\langle r-1 \rangle}, 1^{\langle i+1 \rangle}].
 \end{aligned}$$

Verifichiamo che la formulazione (1.7) e la precedente sono uguali:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}[0^{\langle n-r-i \rangle}, t^{\langle r \rangle}, 1^{\langle i \rangle}] &= \mathbf{b}_i^r(t) \\
 &= (1 - t)\mathbf{b}_i^{r-1}(t) + t\mathbf{b}_{i+1}^{r-1}(t) \\
 &= (1 - t)\mathbf{b}[0^{\langle n-r-i+1 \rangle}, t^{\langle r-1 \rangle}, 1^{\langle i \rangle}] \\
 &\quad + t\mathbf{b}[0^{\langle n-r-i \rangle}, t^{\langle r-1 \rangle}, 1^{\langle i+1 \rangle}].
 \end{aligned}$$

Il generico punto sulla curva di Bézier sarà dato da  $\mathbf{b}[t^{<n>}]$ . Poichè  $t = t \cdot 1 + (1 - t) \cdot 0$ , utilizzando la formula di Leibniz, si può calcolare  $\mathbf{b}[t^{<n>}]$  nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}[t^{<n>}] &= \mathbf{b}[(t \cdot 1 + (1 - t) \cdot 0)^{<n>}] \\ &= \sum_{i=0}^n \underbrace{\binom{n}{i} t^i (1 - t)^{n-i}}_{B_i^n(t)} \underbrace{\mathbf{b}[0^{<n-i>}, 1^{<i>}]}_{\mathbf{b}_i} \end{aligned}$$

dove  $B_i^n(t)$  indicano i polinomi di Bernstein già definiti in precedenza. In modo analogo, si possono esprimere le funzioni  $\mathbf{b}_i^r(t)$  dell'algoritmo di de Casteljau:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_i^r(t) &= \mathbf{b}[0^{<n-r-i>}, t^{<r>}, 1^{<i>}] \\ &= \mathbf{b}[0^{<n-r-i>}, (t \cdot 1 + (1 - t) \cdot 0)^{<r>}, 1^{<i>}] \\ &= \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} t^j (1 - t)^{r-j} \mathbf{b}[0^{<n-r-i-j>}, 1^{<i+j>}] \\ &= \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} t^j (1 - t)^{r-j} \mathbf{b}[0^{<n-i-j>}, 1^{<i+j>}] \\ &= \sum_{j=0}^r \mathbf{b}_{i+j} B_j^r(t). \end{aligned} \tag{1.14}$$

Tramite queste funzioni intermedie, possiamo esprimere in un altro modo ancora  $\mathbf{b}(t)$ :

$$\mathbf{b}^n(t) = \sum_{i=0}^{n-r} \mathbf{b}_i^r(t) B_i^{n-r}(t) \tag{1.15}$$

Ciò vuol dire che si ricavano  $r$  livelli dell'algoritmo di de Casteljau rispetto a  $t$ , poi si interpretano le funzioni risultanti  $\mathbf{b}_i^r(t)$  come punti di controllo della curva di Bézier di grado  $n - r$  ed infine li si valuta in  $t$ .

Vediamo un esempio concreto; per  $n = 3$  si hanno i seguenti passi dell'al-

goritmo di de Casteljau nel senso di (1.14):

$$\begin{array}{l}
 0] \quad \mathbf{b}_0^0 \quad \mathbf{b}_1^0 \quad \mathbf{b}_2^0 \quad \mathbf{b}_3^0 \\
 1] \quad \mathbf{b}_0^1(t) \quad \mathbf{b}_1^1(t) \quad \mathbf{b}_2^1(t) \\
 2] \quad \mathbf{b}_0^2(t) \quad \mathbf{b}_1^2(t) \\
 3] \quad \mathbf{b}_0^3(t).
 \end{array}$$

Si ha così che il generico punto sulla curva si può definire a partire dai punti di controllo sulla prima riga o equivalentemente dalle funzioni dei livelli successivi; cioè si ha che vale

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}_0^3(t) &= \sum_{i=0}^3 B_i^3(t) \mathbf{b}_i^0 \\
 &= \sum_{i=0}^2 B_i^2(t) \mathbf{b}_i^1(t) \\
 &= \sum_{i=0}^1 B_i^1(t) \mathbf{b}_i^2(t).
 \end{aligned}$$

Ciò è proprio garantito dalla possibilità di esprimere  $\mathbf{b}_i^r(t)$  come in (1.14).

## 1.4 Proprietà delle curve di Bézier

In questa sezione vogliamo elencare alcune proprietà delle curve di Bézier così come appaiono in [1] e, eventualmente, analizzarle dal punto di vista dei blossom.

**Invarianza per affinità e per trasformazioni affini dei parametri.** Possiamo sempre trasformare un intervallo chiuso e limitato  $[a, b]$  in  $[0, 1]$ , in modo da esprimere una generica curva di Bézier come

$$\sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n\left(\frac{u-a}{b-a}\right),$$

dove  $t = \frac{u-a}{b-a}$ ,  $u \in [a, b]$  e  $t \in [0, 1]$ .

**Involucro convesso.** Le curve di Bézier hanno supporto contenuto nell'involucro convesso dei punti del poligono di controllo. Tale proprietà segue direttamente da come è stata definita la curva a partire dall'algoritmo di de Casteljau.

**Punti iniziale e finale di una curva di Bézier.** Se il poligono di controllo è costituito dall'insieme di punti  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ , la curva di Bézier generata ha come punto iniziale  $\mathbf{b}_0$  e come punto finale  $\mathbf{b}_n$ . Infatti:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(0) &= \underbrace{\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 0^i 1^{n-i} \mathbf{b}[0^{<n-i>}, 1^{<i>}]}_{\neq 0 \Leftrightarrow i=0} \\ &= \mathbf{b}[0^{<n>}, 1^{<0>}] = \mathbf{b}_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(1) &= \underbrace{\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 1^i 0^{n-i} \mathbf{b}[0^{<n-i>}, 1^{<i>}]}_{\neq 0 \Leftrightarrow i=n} \\ &= \mathbf{b}[0^{<0>}, 1^{<n>}] = \mathbf{b}_n \end{aligned}$$

**Simmetria.** È chiaro che non fa alcuna differenza etichettare i punti di Bézier come  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$  o  $\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_{n-1}, \dots, \mathbf{b}_0$ . Infatti, le curve che si ottengono dai due ordinamenti sono le stesse; differiscono soltanto nella direzione in cui sono attraversate. Questo si dimostra osservando che:

$$\sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j B_j^n(t) = \sum_{k=0}^n \mathbf{b}_{n-k} B_k^n(1-t). \quad (1.16)$$

Ciò segue direttamente dall'identità

$$B_j^n(t) = B_{n-j}^n(1-t),$$

che deriva dalla definizione stessa dei polinomi di Bernstein. Si dice che tali polinomi sono simmetrici rispetto a  $t$  e a  $1-t$ . Si ha infatti che

$$B_j^n(t) = \binom{n}{j} (1-t)^{n-j} t^j$$

e

$$B_{n-j}^n(1-t) = \binom{n}{n-j} t^j (1-t)^{n-j}.$$

L'uguaglianza segue dal fatto che  $\binom{n}{j} = \binom{n}{n-j}$ . Verifichiamo ora brevemente la validità di (1.16); per quanto appena dimostrato, si ha che

$$\sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j B_j^n(t) = \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j B_{n-j}^n(1-t),$$

con  $\mathbf{b}_j = \mathbf{b}[0^{<n-j>}, 1^{<j>}]$ . Poniamo  $n-j = k$ , in modo da avere  $\mathbf{b}_j = \mathbf{b}[0^{<k>}, 1^{<n-k>}] = \mathbf{b}_{n-k}$ . In questo modo si ottiene che

$$\sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j B_{n-j}^n(1-t) = \sum_{k=0}^n \mathbf{b}_{n-k} B_k^n(1-t),$$

che è ciò che volevamo dimostrare.

**Invarianza per combinazioni baricentriche.** Il passaggio dal poligono di controllo alla curva di Bézier lascia invariate le combinazioni baricentriche. Cioè, possiamo costruire la media pesata di due curve di Bézier prendendo la media pesata dei corrispondenti punti sulle curve o considerando la media pesata dei corrispondenti punti del poligono di controllo e costruendo poi la curva. Questo si può esprimere nel seguente modo:

$$\sum_{i=0}^n (\alpha \mathbf{b}_i + \beta \mathbf{c}_i) B_i^n(t) = \alpha \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t) + \beta \sum_{i=0}^n \mathbf{c}_i B_i^n(t)$$

dove  $\mathbf{b}_i$  e  $\mathbf{c}_i$  costituiscono i punti del poligono di controllo delle due curve e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

**Precisione lineare.** Se i vertici del poligono di controllo  $\mathbf{b}_i$  sono equidistanziati su una linea retta che congiunge due punti  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$ , la curva generata è la rappresentazione parametrica lineare del segmento tra  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$ , orientato da  $\mathbf{p}$  a  $\mathbf{q}$ .

## 1.5 Derivate di curve di Bézier

Prima di discutere delle derivate con la terminologia blossom, vediamo in breve come sono definite secondo la tecnica standard. Poichè si ha

$$\mathbf{b}(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \mathbf{b}_i,$$

derivare la curva equivale a derivare i polinomi di Bernstein:

$$\dot{\mathbf{b}}(t) = \sum_{i=0}^n (B_i^n(t))' \mathbf{b}_i.$$

Il problema ora è dunque calcolare la derivata di tali polinomi. Si procede nel modo seguente.

$$\begin{aligned} (B_i^n(t))' &= \binom{n}{i} (n-i)(1-t)^{n-i-1}(-1)t^i + \binom{n}{i} i t^{i-1} (1-t)^{n-i} \\ &= -\frac{n(n-1)!}{(n-i)(n-i-1)!i!} (n-i)(1-t)^{n-i-1} t^i + \frac{n(n-1)!}{i(i-1)!(n-i)!} i t^{i-1} (1-t)^{n-i} \\ &= n \left( B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t) \right). \end{aligned}$$

Perciò si ricava la derivata di una curva di Bézier nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{b}}(t) &= \sum_{i=0}^n n(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)) \mathbf{b}_i \\ &= n \left[ B_0^{n-1}(t) \mathbf{b}_1 + B_1^{n-1}(t) \mathbf{b}_2 + \dots + B_{n-1}^{n-1}(t) \mathbf{b}_n \right. \\ &\quad \left. - B_0^{n-1}(t) \mathbf{b}_0 - B_1^{n-1}(t) \mathbf{b}_1 - \dots - B_{n-1}^{n-1}(t) \mathbf{b}_{n-1} \right] \\ &= n \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) (\mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_i). \end{aligned} \tag{1.17}$$

Lo stesso risultato si ottiene utilizzando la terminologia dei blossom. Vediamo come. Sia  $t$  un punto della retta reale e sia  $\vec{v}$  un vettore. Si può reinterpretare la formula di Leibniz applicata a  $t + \vec{v}$  nel modo seguente:

$$\mathbf{b}[(t + \vec{v})^{<n>}] = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \mathbf{b}[t^{<n-i>}, \vec{v}^{<i>}]. \tag{1.18}$$

In generale la derivata di una curva  $\mathbf{x}(t)$  è definita come

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \lim_{\vec{h} \rightarrow 0} \frac{1}{|\vec{h}|} [\mathbf{x}(t + \vec{h}) - \mathbf{x}(t)],$$

dove  $|\vec{h}|$  indica la norma euclidea del vettore  $\vec{h}$ . Per (1.18) si ha:

$$\frac{d\mathbf{b}(t)}{dt} = \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{1}{|\vec{h}|} \left[ \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \mathbf{b}[t^{<n-i>}, \vec{h}^{<i>}] - \mathbf{b}[t^{<n>}] \right].$$

Per  $i = 0$  i due termini  $\mathbf{b}[t^{<n>}]$  si semplificano e possiamo sviluppare i termini rimanenti della sommatoria utilizzando la proprietà di multilinearità dei blossom:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{b}(t)}{dt} &= \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{1}{|\vec{h}|} \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \mathbf{b}[t^{<n-i>}, \vec{h}^{<i>}] \\ &= \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \left( n \mathbf{b} \left[ t^{<n-1>}, \frac{\vec{h}}{|\vec{h}|} \right] + \binom{n}{2} \mathbf{b} \left[ t^{<n-2>}, \frac{\vec{h}}{|\vec{h}|}, \vec{h} \right] + \dots \right) \\ &= \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \left( n \mathbf{b}[t^{<n-1>}, \vec{1}] + \binom{n}{2} \mathbf{b}[t^{<n-2>}, \vec{1}, \vec{h}] + \dots \right), \end{aligned}$$

dove si è indicato con  $\vec{1}$  il vettore  $\vec{h}$  “normalizzato”; tale vettore vale  $\vec{1} =$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \text{ Quindi si ottiene:}$$

$$\dot{\mathbf{b}}(t) = \frac{d\mathbf{b}(t)}{dt} = n \mathbf{b}[t^{<n-1>}, \vec{1}].$$

Quest'espressione ha due possibili interpretazioni.

Per quanto riguarda la prima, si osserva innanzitutto che vale la seguente

catena di uguaglianze:

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}[t^{\langle n-1 \rangle}, \vec{1}] &\stackrel{(1.1)}{=} \mathbf{b}[t^{\langle n-1 \rangle}, 1] - \mathbf{b}[t^{\langle n-1 \rangle}, 0] \\
&\stackrel{(1.13)}{=} \mathbf{b}_1^{n-1}(t) - \mathbf{b}_0^{n-1}(t) \\
&\stackrel{(1.14)}{=} \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{b}_{j+1} B_j^{n-1}(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{b}_j B_j^{n-1}(t) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} (\mathbf{b}_{j+1} - \mathbf{b}_j) B_j^{n-1}(t).
\end{aligned}$$

In questo modo si conclude che

$$\dot{\mathbf{b}}(t) = n \sum_{j=0}^{n-1} (\mathbf{b}_{j+1} - \mathbf{b}_j) B_j^{n-1}(t) \quad (1.19)$$

$$= n \sum_{j=0}^{n-1} \Delta \mathbf{b}_j B_j^{n-1}(t) \quad (1.20)$$

dove si è posto  $\mathbf{b}_{j+1} - \mathbf{b}_j := \Delta \mathbf{b}_j$ . Ciò è esattamente il risultato (1.17).

La derivata di una curva di Bézier è perciò a sua volta formalmente una curva di Bézier. I suoi coefficienti però non sono più punti, bensì differenze di punti, cioè vettori in  $\mathbb{R}^3$ . Per visualizzare la curva derivata e il suo poligono di controllo, possiamo pensare di costruire un poligono in  $\mathbb{E}^3$  che è definito dai punti  $\mathbf{a} + \Delta \mathbf{b}_0, \mathbf{a} + \Delta \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{a} + \Delta \mathbf{b}_{n-1}$ , con  $\mathbf{a}$  punto arbitrario.

Nella seconda interpretazione si effettuano prima  $n-1$  passi dell'algoritmo di de Casteljau, in modo da ottenere due punti  $\mathbf{b}_1^{n-1}(t)$  e  $\mathbf{b}_0^{n-1}(t)$ , come fatto sopra. Poi con un passo dell'algoritmo rispetto a  $\vec{1}$  (nel senso di  $\vec{1} =$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ come già spiegato) si ottiene:}$$

$$\dot{\mathbf{b}}(t) = n(\mathbf{b}_1^{n-1}(t) - \mathbf{b}_0^{n-1}(t)).$$

Analogamente si possono ricavare le derivate di ordine superiore. Si ha che

$$\frac{d^r \mathbf{b}(t)}{dt^r} = \frac{n!}{(n-r)!} \mathbf{b}[t^{\langle n-r \rangle}, \vec{1}^{\langle r \rangle}]. \quad (1.21)$$



Si può riformulare tale espressione in modo da esprimerla come una curva di Bézier avente per coefficienti dei vettori. A tale scopo definiamo per ricorrenza l'operatore  $\Delta^r$  come

$$\Delta^r \mathbf{b}_j = \Delta^{r-1} \mathbf{b}_{j+1} - \Delta^{r-1} \mathbf{b}_j,$$

dove  $\Delta^1 \mathbf{b}_j = \mathbf{b}_{j+1} - \mathbf{b}_j$ . Si ha, per esempio, per  $r = 0, 1, 2, 3$ :

$$\begin{aligned} \Delta^0 \mathbf{b}_i &= \mathbf{b}_i \\ \Delta^1 \mathbf{b}_i &= \Delta^0 \mathbf{b}_{i+1} - \Delta^0 \mathbf{b}_i \\ &= \mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_i \\ \Delta^2 \mathbf{b}_i &= \Delta^1 \mathbf{b}_{i+1} - \Delta^1 \mathbf{b}_i \\ &= \Delta^0 \mathbf{b}_{i+2} - \Delta^0 \mathbf{b}_{i+1} - \Delta^0 \mathbf{b}_{i+1} + \Delta^0 \mathbf{b}_i \\ &= \mathbf{b}_{i+2} - 2\mathbf{b}_{i+1} + \mathbf{b}_i \\ \Delta^3 \mathbf{b}_i &= \Delta^2 \mathbf{b}_{i+1} - \Delta^2 \mathbf{b}_i \\ &= \Delta^1 \mathbf{b}_{i+2} - \Delta^1 \mathbf{b}_{i+1} - \Delta^1 \mathbf{b}_{i+1} + \Delta^1 \mathbf{b}_i \\ &= \Delta^0 \mathbf{b}_{i+3} - \Delta^0 \mathbf{b}_{i+2} - 2\Delta^0 \mathbf{b}_{i+2} + 2\Delta^0 \mathbf{b}_{i+1} + \Delta^0 \mathbf{b}_{i+1} - \Delta^0 \mathbf{b}_i \\ &= \mathbf{b}_{i+3} - 3\mathbf{b}_{i+2} + 3\mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_i \end{aligned}$$

In generale si ha:

$$\Delta^r \mathbf{b}_i = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-1)^{r-j} \mathbf{b}_{i+j}.$$

Si ottiene così la seguente formulazione della derivata  $r$ -esima di una curva di Bézier:

**Proposizione 2.**

$$\frac{d^r \mathbf{b}^n}{dt^r}(t) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{j=0}^{n-r} \Delta^r \mathbf{b}_j B_j^{n-r}(t), \quad (1.22)$$

dove  $t \in [0, 1]$  e  $n$  è il grado della curva di Bézier.

*Dimostrazione.* Si può dimostrare per induzione. Se  $r = 1$  ci si riconduce al caso di (1.20), che abbiamo già dimostrato nel dettaglio. L'ipotesi induttiva

garantisce che (1.22) sia corretta per un generico  $r$ . Passiamo a dimostrare l'uguaglianza per  $r + 1$ .

$$\begin{aligned}
\frac{d^{r+1}\mathbf{b}(t)}{dt^{r+1}} &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{j=0}^{n-r} \Delta^r \mathbf{b}_j B_j^{n-r}(t) \right] \\
&= \frac{n!}{(n-r)!} (n-r) \sum_{j=0}^{n-r-1} \Delta(\Delta^r \mathbf{b}_j) B_j^{n-r-1}(t) \\
&= \frac{n!}{(n-(r+1))!} \sum_{j=0}^{n-(r+1)} \underbrace{(\Delta^r \mathbf{b}_{j+1} - \Delta^r \mathbf{b}_j)}_{\Delta^{r+1} \mathbf{b}_j} B_j^{n-(r+1)}(t) \\
&= \frac{n!}{(n-(r+1))!} \sum_{j=0}^{n-(r+1)} \Delta^{r+1} \mathbf{b}_j B_j^{n-(r+1)}(t).
\end{aligned}$$

Si è così dimostrato che l'uguaglianza è valida anche per  $r + 1$  e quindi si è mostrata la veridicità dell'affermazione (1.22).  $\square$

Due casi importanti di (1.22) sono quelli relativi a  $t = 0$  e a  $t = 1$ . Infatti si ha:

$$\frac{d^r \mathbf{b}^n}{dt^r}(0) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{j=0}^{n-r} \Delta^r \mathbf{b}_j \underbrace{B_j^{n-r}(0)}_{=0 \ \forall j \neq 0} = \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r \mathbf{b}_0 \quad (1.23)$$

e

$$\frac{d^r \mathbf{b}^n}{dt^r}(1) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{j=0}^{n-r} \Delta^r \mathbf{b}_j \underbrace{B_j^{n-r}(1)}_{=0 \ \forall j \neq n-r} = \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r \mathbf{b}_{n-r}.$$

Si osserva che l' $r$ -esima derivata di una curva di Bézier nel punto iniziale e nel punto finale dipende solo dagli  $r + 1$  punti adiacenti a tali punti di bordo. Per  $r = 0$  si ottiene la proprietà di interpolazione alla frontiera, cioè

$$\mathbf{b}^n(0) = \mathbf{b}_0 \quad e \quad \mathbf{b}^n(1) = \mathbf{b}_n.$$

Per  $r = 1$  si ottengono i vettori tangenti alla curva di Bézier in  $t = 0$  e in  $t = 1$ , cioè nel punto iniziale e nel punto finale:

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{b}^n}{dt}(0) &= n\Delta \mathbf{b}_0 = n(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0), \\
\frac{d\mathbf{b}^n}{dt}(1) &= n\Delta \mathbf{b}_{n-1} = n(\mathbf{b}_n - \mathbf{b}_{n-1}).
\end{aligned}$$

In generale, conoscendo le derivate di una funzione in un punto, possiamo costruire lo sviluppo in serie di Taylor centrato in quel punto. Nel caso di una curva di Bézier ci si comporta nello stesso modo. Supponiamo di avere a disposizione tutte le derivate (fino all' $n$ -esima) di una curva di Bézier nel suo punto iniziale; si può allora scrivere lo sviluppo in serie di Taylor nel seguente modo:

$$\mathbf{b}^n(t) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \frac{d^j \mathbf{b}^n}{dt^j}(0) t^j.$$

Utilizzando la (1.23) si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}^n(t) &= \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \frac{n!}{(n-j)!} \Delta^j \mathbf{b}_0 t^j \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \Delta^j \mathbf{b}_0 t^j. \end{aligned}$$

## 1.6 La proprietà di suddivisione

Una curva di Bézier è solitamente definita sull'intervallo  $[0, 1]$ , ma ve ne possono essere di definite su un intervallo chiuso e limitato qualunque  $[a, b]$ . In tal caso, i punti  $\mathbf{b}_i$  non si possono più esprimere come in (1.12); bisogna ridefinire il dominio tramite la funzione seguente:

$$\begin{aligned} [a, b] &\longrightarrow [0, 1] \\ u &\longmapsto t = \frac{u - a}{b - a}. \end{aligned}$$

In questo modo si ha che

$$\begin{aligned} t = 0 &\Leftrightarrow u = a \\ t = 1 &\Leftrightarrow u = b. \end{aligned}$$

Si conclude così che i punti del poligono di controllo relativi a un intervallo generico  $[a, b]$  sono

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{b}[a^{<n-i>}, b^{<i>}];$$

ciò significa che vengono effettuati  $n - i$  passi dell'algoritmo di de Casteljau rispetto ad  $a$  e  $i$  passi rispetto a  $b$ .

Supponiamo di considerare una curva di Bézier definita su  $[0, 1]$  e di voler restringere il dominio a  $[0, c]$ , con  $c \in [0, 1]$ . È noto che tale restrizione è a sua volta una curva di Bézier dello stesso grado. Come determinare i suoi punti di controllo? I punti del poligono di controllo, secondo il formalismo blossom, sono:

$$\mathbf{c}_i = \mathbf{b}[0^{<n-i>}, c^{<i>}]. \quad (1.24)$$

Perciò basta eseguire  $i$  passi dell'algoritmo di de Casteljau rispetto a  $c$ . Nel formalismo classico, si può anche scrivere per la (1.13):

$$\mathbf{c}_i = \mathbf{b}_0^i(c).$$

Questo esprime la *formula di suddivisione per le curve di Bézier*.

Il formalismo blossom risulta in questo caso molto più efficace e più vantaggioso del formalismo standard; infatti, una volta definita la funzione blossom di  $n$  variabili relativa a una curva di Bézier di grado  $n$  avente dominio  $[0, 1]$ , è possibile ricavare facilmente gli  $n + 1$  punti del poligono di controllo del tratto di curva definito su  $[0, c]$ , dove  $c \in (0, 1)$ , applicando la (1.24). In tal modo, non è necessario costruire una nuova funzione che definisca il tratto di curva desiderato, contrariamente a quanto si sarebbe fatto con la tecnica standard. I calcoli sono così notevolmente semplificati e l'algoritmo risulta molto più veloce e numericamente meno dispendioso.

Per la proprietà di simmetria delle curve di Bézier e dei blossom è possibile trovare anche i punti del poligono di controllo della curva che si ottiene restringendo il dominio all'intervallo  $[c, 1]$ : essi sono dati da  $\mathbf{b}_i^{n-i}(c) = \mathbf{b}[c^{<n-i>}, 1^{<i>}]$ .

L'utilità del formalismo blossom sta nel fatto che, data la funzione blossom, è possibile esprimere un qualsiasi tratto di una curva di Bézier come una curva di Bézier avente come punti del poligono di controllo i  $\mathbf{c}_i$  come in (1.24).

Immaginiamo, più in generale, di suddividere l'intervallo  $[0, 1]$  nei due sottointervalli  $[0, t]$  e  $[t, 1]$ . Anzichè avere un solo poligono di controllo definito

sull'intervallo  $[0, 1]$  si ottengono due sottopoligoni tali che l'ultimo punto del primo coincide con il primo punto del secondo. Questi sottopoligoni di controllo definiscono due archi: il primo va da  $\mathbf{b}^n(0)$  a  $\mathbf{b}^n(t)$  e il secondo va da  $\mathbf{b}^n(t)$  a  $\mathbf{b}^n(1)$ .

Si può così supporre di suddividere l'intervallo  $[0, 1]$  in  $t = \frac{1}{2}$  in modo da ottenere due sottointervalli; poi si suddividono a loro volta questi ultimi in  $t = \frac{1}{4}$  e in  $t = \frac{3}{4}$  rispettivamente, e così via. Dopo  $k$  livelli di suddivisione, si ottengono  $2^k$  sottopoligoni di controllo di Bézier e ciascuno di questi descrive un archetto della curva originale. Questi sottopoligoni convergono alla curva all'aumentare di  $k$  e, per tale motivo, essi costituiscono uno strumento naturale per l'approssimazione della curva stessa. Inoltre, il metodo di suddivisione è un metodo stabile, poichè coinvolge ad ogni livello della ricorsione solo un'addizione e uno spostamento di un bit nell'analisi dei dati al calcolatore. Per avere una buona approssimazione saranno perciò necessarie al più  $n$  iterazioni dell'algoritmo di suddivisione.

Un'interessante applicazione che sfrutta la procedura di suddivisione è la ricerca dei punti di intersezione di una curva piana di Bézier con una retta  $L$  data, se essi esistono. Il punto di partenza di questa ricerca è la creazione di un cosiddetto *minmax box*, che è il più piccolo rettangolo, con lati paralleli agli assi coordinati, che contiene il poligono di controllo della curva considerata. Per le proprietà delle curve di Bézier sappiamo che tale rettangolo conterrà interamente la curva di Bézier. A questo punto, è facile capire se la retta interseca in qualche punto il minmax box. Se questo non succede si può già concludere che la retta non interseca la curva, altrimenti vi possono essere dei punti di intersezione. Ora, applicando il processo di suddivisione alla curva, spezzandola nel punto corrispondente a  $t = \frac{1}{2}$ , si vanno a considerare i due minmax box relativi ai due sottopoligoni di controllo. E così via. Alla fine, la dimensione dei rettangoli minmax considerati sarà talmente ridotta che si potrà verificare l'esistenza di un punto di intersezione tra la retta  $L$  e la curva semplicemente sostituendo le coordinate dei punti centrali dei minmax box nell'equazione della retta. Man mano che questa procedura

avanza si ottengono sottopoligoni di controllo sempre più semplici: se i punti di un poligono sono quasi allineati, si può sostituire tale poligono con un segmento e andare poi a intersecare la retta  $L$  con esso per trovare il punto di intersezione. Il processo di suddivisione permette così di trovare tutti gli eventuali punti di intersezione tra una retta e una curva di Bézier.

## 1.7 Il legame tra blossom e polari

Consideriamo nuovamente l'algoritmo di de Casteljau e supponiamo di effettuare il primo passo del processo ricorsivo e di valutare le  $n - 1$  funzioni rispetto ad un parametro  $t_1$ . Otteniamo i punti  $\mathbf{b}_0^1(t_1), \dots, \mathbf{b}_{n-1}^1(t_1)$ , che possono essere visti come punti di un poligono di controllo di una nuova curva di grado  $n - 1$ , che indichiamo con  $\mathbf{p}_1(t)$ .

**Definizione 3.** La *prima polare* di una curva di Bézier avente come punti del poligono di controllo  $\mathbf{b}_i$  per  $i = 1, 2, \dots, n$ , relativa al valore  $t_1 \in [0, 1]$  del parametro, è

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1(t) &= \mathbf{b}[t_1, t^{<n-1>}] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{b}_i^1(t_1) B_i^{n-1}(t). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Si veda la figura 1.4 per chiarezza: la polare è quella indicata con il tratto più spesso, mentre la curva di partenza con quello più sottile.

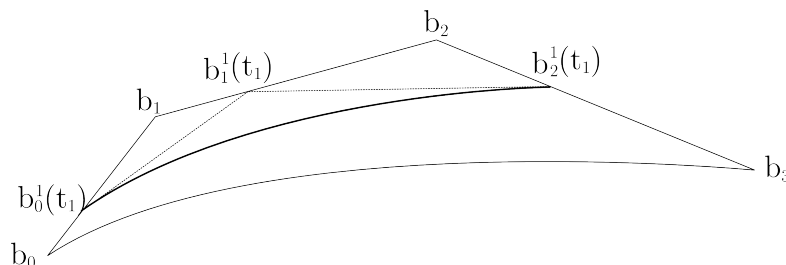


Figura 1.4: Polare di una curva di Bézier di grado  $n = 3$

Tale curva coincide con quella di Bézier di grado  $n - 1$  avente poligono di controllo formato da  $\mathbf{b}_1^1(t_1), \dots, \mathbf{b}_{n-1}^1(t_1)$ .

Si può esprimere l'uguaglianza (1.25) presente nella definizione di polare in modo da evidenziare una proprietà di questa curva in relazione alla curva di Bézier di partenza. Osserviamo che vale la seguente catena di uguaglianze:

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_1(t) &= \sum_{i=0}^{n-1} [(1-t_1)\mathbf{b}_i + t_1\mathbf{b}_{i+1}] B_i^{n-1}(t) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} [(1-t_1)\mathbf{b}_i + t_1\mathbf{b}_{i+1} - \underbrace{\mathbf{b}_i^1(t)}_{\sum_{j=0}^1 \mathbf{b}_{i+j} B_j^1(t)}] B_i^{n-1}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{b}_i^1(t) B_i^{n-1}(t) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} [(1-t_1)\mathbf{b}_i + t_1\mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_i(1-t) - \mathbf{b}_{i+1}t] B_i^{n-1}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{b}_i^1(t) B_i^{n-1}(t) \\
&= (t_1 - t) \sum_{i=0}^{n-1} (\mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_i) B_i^{n-1}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{b}_i^1(t) B_i^{n-1}(t) \\
&= \mathbf{b}(t) + \left( \frac{t_1 - t}{n} \right) \frac{d\mathbf{b}(t)}{dt}.
\end{aligned}$$

La tangente ad ogni punto  $\mathbf{b}(t)$  interseca la polare in  $\mathbf{p}_1(t)$ . Questo è valido non solo per curve piane ma anche per curve spaziali: consideriamo per esempio una curva cubica non piana. La polare  $\mathbf{p}_1$  relativa ad un valore  $t_1 \in [0, 1]$  giace sul piano osculatore della cubica in  $\mathbf{b}(t_1)$ : se intersechiamo tutte le tangenti a tale cubica con il suo piano osculatore in  $\mathbf{b}(t_1)$  otterremo la curva polare.

Consideriamo la cubica gobba, cioè quella descritta da

$$\mathbf{b}(t) : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3. \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

Calcoliamo la derivata prima di  $\mathbf{b}(t)$ :

$$\dot{\mathbf{b}}(t) : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2t \\ z = 3t^2 \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

e la derivata seconda:

$$\ddot{\mathbf{b}}(t) : \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = 6t. \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

Il piano osculatore in  $\mathbf{b}(\tau)$  è definito nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(h, k, \tau) &= \mathbf{b}(\tau) + h\dot{\mathbf{b}}(\tau) + k\ddot{\mathbf{b}}(\tau) \\ &: \begin{cases} x = \tau + h \\ y = \tau^2 + 2\tau h + 2k \\ z = \tau^3 + 3\tau^2 h + 6k\tau. \end{cases} \end{aligned}$$

Ricaviamo la forma cartesiana di tale piano a partire dalla forma parametrica appena trovata:

$$\mathbf{Q}(h, k, \tau) : \begin{cases} h = x - \tau \\ k = \frac{y}{2} - \tau x + \frac{\tau^2}{2} \\ z = -3\tau^2 x + 3\tau y + \tau^3; \end{cases}$$

otteniamo così:

$$3\tau^2 x - 3\tau y + z - \tau^3 = 0. \quad (1.26)$$

A questo punto, definiamo la polare della cubica gobba nel punto generico  $\tau$ :

$$\mathbf{p}_1(t, \tau) : \begin{cases} x = t + \frac{\tau-t}{3} \\ y = t^2 + \frac{\tau-t}{3} \cdot 2t \\ z = t^3 + \frac{\tau-t}{3} \cdot 3t^2 \end{cases}$$



cioè

$$\mathbf{p}_1(t, \tau) : \begin{cases} x = \frac{2}{3}t + \frac{\tau}{3} \\ y = \frac{t^2}{3} + \frac{2}{3}\tau t \\ z = \tau t^2. \end{cases}$$

Verifichiamo ora che la polare appena definita giace sul piano osculatore (1.26):

$$3\tau^2\left(\frac{2}{3}t + \frac{\tau}{3}\right) - 3\tau\left(\frac{t^2}{3} + \frac{2}{3}\tau t\right) + \tau t^2 - \tau^3 = 0,$$

cioè

$$2\tau^2 t + \tau^3 - \tau t^2 - 2\tau^2 t + \tau t^2 - \tau^3 = 0,$$

che è un'identità.

Poichè abbiamo dimostrato che la polare della cubica gobba rispetto a un generico  $\tau \in [0, 1]$  giace sul piano osculatore in  $\mathbf{b}(\tau)$  e poichè ogni curva di Bézier (non piana) di grado 3 a meno di un'affinità è equivalente ad una cubica gobba, abbiamo dimostrato che ciò vale per ogni curva di questo tipo.

Se passiamo a costruire le due polari successive otterremo una funzione  $\mathbf{b}[t_1, t_2, t_3]$ . Se a questo punto generalizziamo il discorso e immaginiamo di ripetere questo procedimento per una curva  $\mathbf{b}(t)$  di Bézier di grado  $n$  e usando  $t_1, \dots, t_n \in [0, 1]$  otterremo una funzione  $\mathbf{b}[t_1, t_2, \dots, t_n]$ : si potrebbe dimostrare che *il blossom di una curva  $\mathbf{b}(t)$  non è altro che l' $n$ -esima polare della stessa curva.*

## 1.8 L'innalzamento di grado

Supponiamo di voler tracciare una curva di Bézier con una certa forma e di iniziare a fare qualche tentativo con curve di grado  $n$ . Dopo aver modificato un po' la curva, potremmo renderci conto che essa non possiede sufficiente flessibilità per riprodurre la forma desiderata e che perciò il numero di vertici del poligono di controllo non è abbastanza elevato. Una soluzione a questo problema consiste nel conferire maggiore flessibilità alla curva aggiungendo

un nuovo vertice di controllo. Vogliamo però che questo non modifichi radicalmente la forma della curva che è stata creata fino ad ora: come obiettivo poniamoci quello di ricercare dei vertici di controllo  $\hat{\mathbf{b}}_0, \dots, \hat{\mathbf{b}}_{n+1}$  che siano in grado di descrivere la stessa curva relativa al poligono originale  $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n$ .

Per ricavare le relazioni tra i vertici di controllo iniziali e quelli nuovi, avremo bisogno della

**Proposizione 3.** Le tre formule di innalzamento di grado relative ai polinomi di Bernstein sono:

1.  $(1-t)B_i^n(t) = \binom{n+1-i}{n+1} B_i^{n+1}(t);$
2.  $tB_i^n(t) = \binom{i+1}{n+1} B_{i+1}^{n+1}(t);$
3.  $B_i^n(t) = \binom{n+1-i}{n+1} B_i^{n+1}(t) + \binom{i+1}{n+1} B_{i+1}^{n+1}(t).$

*Dimostrazione.*

1. Applicando semplicemente la definizione del polinomio di Bernstein,

$$\begin{aligned} (1-t)B_i^n(t) &= \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n+1-i} = \binom{n+1}{n+1} \binom{n+1-i}{n+1-i} \frac{n!}{(n-i)!i!} t^i (1-t)^{n+1-i} \\ &= \binom{n+1-i}{n+1} \frac{(n+1)!}{(n+1-i)!i!} t^i (1-t)^{n+1-i} = \binom{n+1-i}{n+1} B_i^{n+1}(t). \end{aligned}$$

2. Come prima,

$$\begin{aligned} tB_i^n(t) &= \frac{n!}{i!(n-i)!} t^{i+1} (1-t)^{n-i} = \binom{i+1}{i+1} \binom{n+1}{n+1} \frac{n!}{i!(n-i)!} t^{i+1} (1-t)^{n-i} \\ &= \binom{i+1}{n+1} \frac{(n+1)!}{(i+1)!(n-i)!} t^{i+1} (1-t)^{n-i} = \binom{i+1}{n+1} B_{i+1}^{n+1}(t). \end{aligned}$$

3. Segue facilmente dall'uguaglianza

$$B_i^n(t) = (1-t)B_i^n(t) + tB_i^n(t),$$

utilizzando la 1 e la 2.

□

A questo punto, possiamo procedere in due modi diversi per arrivare alla formulazione dei nuovi vertici di controllo: con il metodo classico e tramite i blossom.

Iniziamo la nostra analisi utilizzando la notazione standard. Possiamo sempre scrivere la curva come  $\mathbf{b}(t) = (1-t)\mathbf{b}(t) + t\mathbf{b}(t)$ , o, in forma estesa, sfruttando la Proposizione 3, come

$$\mathbf{b}(t) = \sum_{i=0}^n \frac{n+1-i}{n+1} \mathbf{b}_i B_i^{n+1}(t) + \sum_{i=0}^n \frac{i+1}{n+1} \mathbf{b}_i B_{i+1}^{n+1}(t).$$

Possiamo estendere la prima sommatoria all'indice  $n+1$  poichè il termine corrispondente è nullo; gli indici della seconda sommatoria possono inoltre essere traslati in modo che  $i \rightarrow i-1$  e si può aggiungere l'indice 0 poichè il termine corrispondente è nullo. Si ha perciò

$$\mathbf{b}(t) = \sum_{i=0}^{n+1} \frac{n+1-i}{n+1} \mathbf{b}_i B_i^{n+1}(t) + \sum_{i=0}^{n+1} \frac{i}{n+1} \mathbf{b}_{i-1} B_i^{n+1}(t).$$

Cioè, ricombinando le due somme,

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(t) &= \sum_{i=0}^{n+1} \left[ \frac{i}{n+1} \mathbf{b}_{i-1} + \frac{n+1-i}{n+1} \mathbf{b}_i \right] B_i^{n+1}(t) \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} \left[ \frac{i}{n+1} \mathbf{b}_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) \mathbf{b}_i \right] B_i^{n+1}(t). \end{aligned}$$

Possiamo così definire i vertici di controllo relativi alla curva di grado  $n+1$  come

$$\hat{\mathbf{b}}_i = \frac{i}{n+1} \mathbf{b}_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) \mathbf{b}_i, \quad i = 0, \dots, n+1.$$

Essi sono ottenuti dal poligono di partenza tramite interpolazione lineare a tratti con parametro  $\frac{i}{n+1}$ . Segue che il nuovo poligono giace nell'involucro convesso del precedente; esso è inoltre più vicino alla curva che viene generata.

Passiamo ora ad una formulazione che usa la tecnica dei blossom. Si definisce innanzitutto un blossom  $\hat{\mathbf{b}}[t_1, \dots, t_{n+1}]$  nel modo seguente e, successivamente, si ricavano i vertici del nuovo poligono di controllo utilizzando l'uguaglianza

$$\hat{\mathbf{b}}_i = \hat{\mathbf{b}}[0^{<n+1-i>}, 1^{<i>}].$$

Il nuovo blossom è definito così:

$$\hat{\mathbf{b}}[t_1, \dots, t_{n+1}] = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \mathbf{b}[t_1, \dots, t_{n+1}|t_j],$$

dove si indica con  $\mathbf{b}[t_1, \dots, t_{n+1}|t_j]$  il blossom  $\mathbf{b}[t_1, \dots, t_{n+1}]$  a cui è stato rimosso l'argomento  $j$ -esimo.

*Esempio 2.* Rendiamo più chiara questa notazione facendo un esempio che nel contempo proverà che le due formulazioni sono equivalenti per l'innalzamento di grado da 2 a 3. Supponiamo di voler innalzare il grado di una curva avente vertici di controllo  $\mathbf{b}_0 = \mathbf{b}[0, 0]$ ,  $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}[0, 1] = \mathbf{b}[1, 0]$  e  $\mathbf{b}_2 = \mathbf{b}[1, 1]$ . Il blossom della nuova curva sarà perciò

$$\hat{\mathbf{b}}[t_1, t_2, t_3] = \frac{1}{3} [\mathbf{b}[t_2, t_3] + \mathbf{b}[t_1, t_3] + \mathbf{b}[t_1, t_2]].$$

A partire da quest'ultimo si ricavano i vertici del nuovo poligono di controllo.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{b}}_0 &= \hat{\mathbf{b}}[0, 0, 0] = \mathbf{b}[0, 0] = \mathbf{b}_0 \\ \hat{\mathbf{b}}_1 &= \hat{\mathbf{b}}[0, 0, 1] = \frac{1}{3} [\mathbf{b}[0, 0] + 2\mathbf{b}[0, 1]] = \frac{1}{3} [\mathbf{b}_0 + 2\mathbf{b}_1] \\ \hat{\mathbf{b}}_2 &= \hat{\mathbf{b}}[0, 1, 1] = \frac{1}{3} [2\mathbf{b}[0, 1] + \mathbf{b}[1, 1]] = \frac{1}{3} [2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2] \\ \hat{\mathbf{b}}_3 &= \hat{\mathbf{b}}[1, 1, 1] = \mathbf{b}[1, 1] = \mathbf{b}_2. \end{aligned}$$

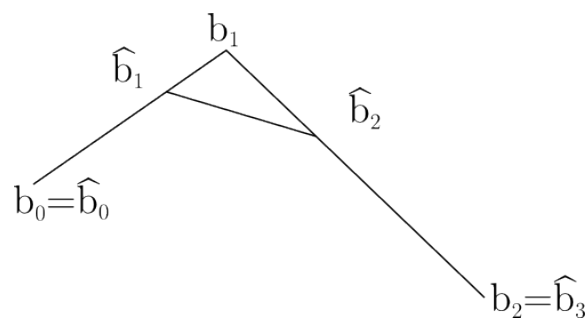


Figura 1.5: Innalzamento di grado da 2 a 3

Proviamo che questi punti coincidono con quelli che si possono ricavare con la tecnica standard:

$$\hat{\mathbf{b}}_0 = \mathbf{b}_0$$

$$\hat{\mathbf{b}}_1 = \frac{1}{3}\mathbf{b}_0 + \left(1 - \frac{1}{3}\right)\mathbf{b}_1 = \frac{1}{3}\mathbf{b}_0 + \frac{2}{3}\mathbf{b}_1$$

$$\hat{\mathbf{b}}_2 = \frac{2}{3}\mathbf{b}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{b}_2$$

$$\hat{\mathbf{b}}_3 = \mathbf{b}_2.$$



# Capitolo 2

## Le superfici di Bézier

### 2.1 Definizione classica di una superficie di Bézier

Le superfici di Bézier sono prodotti tensoriali di curve di Bézier e costituiscono applicazioni definite sul quadrato unitario del piano  $(u, v)$  a valori in  $\mathbb{E}^3$ . Ciascuna di esse possiede un bigrado  $(m, n)$  in base al grado, rispettivamente  $m$  e  $n$ , delle due curve di Bézier di cui è prodotto tensoriale. Per definire una superficie di Bézier di bigrado  $(1, 1)$  è necessario conoscere la posizione dei quattro punti corrispondenti ai vertici  $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$  di tale quadrato. Essi definiscono un tetraedro di controllo: l'idea è di definire una funzione sul quadrato per “riempire” il quadrilatero sghembo vuoto, in modo che ci sia una corrispondenza tra i quattro lati del dominio quadrato e le quattro curve di Bézier di grado 1, definite su un intervallo  $[0, 1]$ , che costituiscono i lati del quadrilatero e delimitano la porzione di superficie che intendiamo definire. Se indichiamo con  $\mathbf{b}_{00}$ ,  $\mathbf{b}_{01}$ ,  $\mathbf{b}_{10}$  e  $\mathbf{b}_{11}$  le immagini dei vertici del dominio quadrato in  $\mathbb{E}^3$ , l'insieme dei punti in  $\mathbb{E}^3$  della forma

$$\mathbf{b}(u, v) = (1 - v)[(1 - u)\mathbf{b}_{00} + u\mathbf{b}_{10}] + v[(1 - u)\mathbf{b}_{01} + u\mathbf{b}_{11}] \quad (2.1)$$

è la parametrizzazione di una porzione di quadrica a sella: un *paraboloide iperbolico* passante per i quattro punti  $\mathbf{b}_{ij}$ . Esso rappresenta la superficie di

Bézier di bigrado  $(1, 1)$  (cioè di grado 1 rispetto a  $u$  e di grado 1 rispetto a  $v$ ) relativa al poliedro di controllo definito dai  $\mathbf{b}_{ij}$ .

Per arrivare alla (2.1) si procede nel seguente modo: si parametrizzano i due lati del poliedro corrispondenti a  $v = 0$  e  $v = 1$  come se fossero curve di Bézier di grado 1 sull'intervallo  $[0, 1]$  con

$$\begin{aligned} (1-u)\mathbf{b}_{00} + u\mathbf{b}_{10} \\ (1-u)\mathbf{b}_{01} + u\mathbf{b}_{11} \end{aligned} \quad (2.2)$$

e, fissato  $u$ , si parametrizzano le curve di Bézier aventi come punto iniziale e punto finale (2.2) nel modo usuale. Si ottiene perciò la (2.1).

Consideriamo ora una superficie di Bézier di bigrado  $(m, n)$ . Possiamo generalizzare il discorso precedente introducendo il passo induttivo dell'*algoritmo di de Casteljau per superfici*; le funzioni intermedie di tale algoritmo, per  $i = 0, \dots, m-r$  e  $j = 0, \dots, n-s$ , valgono

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{ij}^{r,s}(u, v) = (1-u)(1-v)\mathbf{b}_{i,j}^{r-1,s-1} + u(1-v)\mathbf{b}_{i+1,j}^{r-1,s-1}(u, v) \\ + (1-u)v\mathbf{b}_{i,j+1}^{r-1,s-1}(u, v) + uv\mathbf{b}_{i+1,j+1}^{r-1,s-1}(u, v), \end{aligned} \quad (2.3)$$

con  $r = 1, \dots, m$  e  $s = 1, \dots, n$ . Si intende che  $\mathbf{b}_{i,j}^{0,0}(u, v) = \mathbf{b}_{i,j}$  e che  $\mathbf{b}_{0,0}^{m,n}(u, v)$  sia il valore della funzione  $\mathbf{b}(u, v)$  che stiamo definendo. Se  $m \neq n$  ed  $m < n$  si procede con l'algoritmo indicato in (2.3) fino al passo  $m$ ; dal passo  $m+1$  al passo  $n$  si procede invece con l'algoritmo ricorsivo di de Casteljau per curve. Arriviamo così alla definizione di superficie di Bézier, ricavando una forma chiusa dalla formula ricorsiva (2.3).

**Definizione 4.** Una *superficie di Bézier* (o *patch tensoriale di Bézier*) di bigrado  $(m, n)$  è definita, a partire da un insieme di  $(m+1)(n+1)$  punti  $\{\mathbf{b}_{ij}\}_{\substack{i=0,\dots,m \\ j=0,\dots,n}}$ , nel modo seguente:

$$\mathbf{b}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) \mathbf{b}_{ij}, \quad (2.4)$$

dove  $B_i^m(u)$  e  $B_j^n(v)$  sono i polinomi di Bernstein già definiti.

Tali punti definiscono un *poliedro di controllo* e possono essere schematizzati in una *griglia* o *rete*, che è un oggetto *combinatorio* ben diverso dal poliedro stesso. Ad ogni quadrato della griglia corrisponde un quadrilatero sghembo del poliedro e, tramite la rappresentazione combinatoria della rete, è possibile individuare a quali altri quadrilateri sghembi esso è adiacente osservando le adiacenze dei quadrati nella griglia. Per chiarire quest'idea, indichiamo in figura 2.1 sulla sinistra la griglia relativa a un patch tensoriale di bigrado  $(2, 3)$  e sulla destra un poliedro di controllo associato.

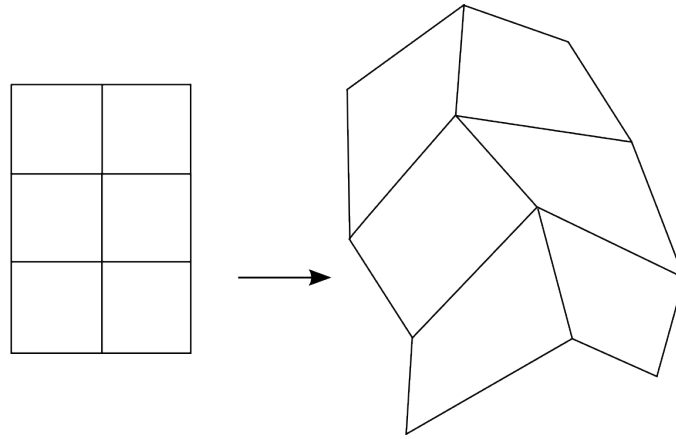


Figura 2.1: *Griglia e poliedro di controllo di una superficie di Bézier di bigrado  $(2, 3)$*

Esemplifichiamo inoltre graficamente in Figura 2.2 come si arriva a determinare il valore della funzione relativa ad una superficie di Bézier di bigrado  $(3, 5)$  tramite l'algoritmo di de Casteljau. Osserviamo che fino al passo 3 si utilizza l'algoritmo in (2.3) e per gli ultimi due passi si procede con l'algoritmo di de Casteljau per curve.

L'espressione generale delle derivate della funzione  $\mathbf{b}$  come in [1] è

$$\frac{\partial^{r+s} \mathbf{b}(u, v)}{\partial u^r \partial v^s} = \frac{m!}{(m-r)!} \frac{n!}{(n-s)!} \sum_{i=0}^{m-r} \sum_{j=0}^{n-s} B_i^{m-r}(u) B_j^{n-s}(v) \Delta^{r,s}(\mathbf{b}_{ij}), \quad (2.5)$$

dove

$$\Delta^{r,s}(\mathbf{b}_{ij}) = \mathbf{b}_{i+r, j+s} + \mathbf{b}_{i+r, j} - \mathbf{b}_{i, j+s} + \mathbf{b}_{ij}. \quad (2.6)$$



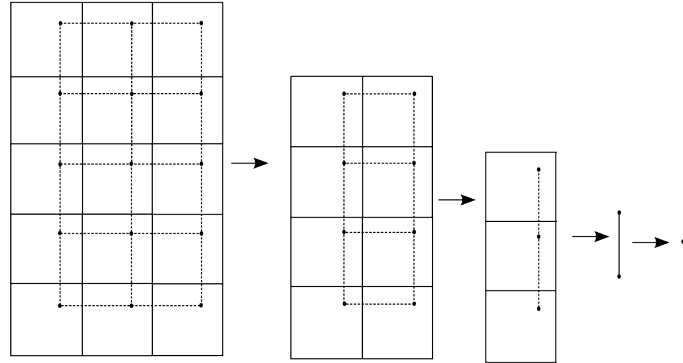


Figura 2.2: *Passi dell'algorithmo di de Casteljau relativi ad una superficie di Bézier di bigrado (3, 5)*

## 2.2 Il prodotto tensore blossom

La tecnica dei blossom può essere utilizzata anche per rappresentare una superficie di Bézier di bigrado  $(m, n)$  secondo la definizione precedente.

**Definizione 5** (Prodotto tensore blossom). Un prodotto tensore blossom di bigrado  $(m, n)$  si può rappresentare come una funzione del tipo:

$$\mathbf{b} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{E}^3$$

dove

$$\mathbf{b}[u_1, \dots, u_m | v_1, \dots, v_n] = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f_i^m(u_1, \dots, u_m) g_j^n(v_1, \dots, v_n) \mathbf{b}_{ij}.$$

Indichiamo con

$$f_i^m : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R} \quad i = 0, 1, \dots, m$$

$$f_i^m(u_1, \dots, u_m) = \sum a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_m$$

una funzione tale che

- ciascun fattore  $a_k$  è uguale o a  $u_k$  o a  $1 - u_k$ , per  $k = 1, \dots, m$ ;
- la sommatoria è su tutte le possibili combinazioni di  $a_1 \cdot \dots \cdot a_m$  con  $i$  fattori del tipo  $u_k$  e  $n - i$  fattori della forma  $1 - u_k$ .

In modo del tutto analogo si definiscono le funzioni  $g_j^n(v_1, \dots, v_n)$ , con  $g_j^n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  per  $j = 1, \dots, n$ . Il prodotto tensore blossom, fissati  $v_1, \dots, v_n$ , si comporta come il blossom definito nel Capitolo precedente rispetto ad  $u_1, \dots, u_m$ ; analogamente, se fissiamo  $u_1, \dots, u_m$ , otterremo il blossom rispetto a  $v_1, \dots, v_n$ .

*Esempio 3.* Vediamo cosa si intende nel caso particolare di  $(m, n) = (3, 2)$ . Innanzitutto definiamo passo passo le funzioni  $f_i^3(u_1, u_2, u_3)$  per  $i = 0, 1, 2, 3$ . Si ha

$$f_0^3(u_1, u_2, u_3) = (1 - u_1)(1 - u_2)(1 - u_3),$$

poichè vi sono tre fattori del tipo  $1 - u_k$  e zero del tipo  $u_k$  (ovviamente vi è un'unica combinazione). Poi

$$f_1^3(u_1, u_2, u_3) = u_1(1 - u_2)(1 - u_3) + (1 - u_1)u_2(1 - u_3) + (1 - u_1)(1 - u_2)u_3,$$

siccome è costituito dalla somma delle tre possibili combinazioni aventi due fattori del tipo  $1 - u_k$  e uno della forma  $u_k$ . Con motivazioni analoghe troviamo

$$f_2^3(u_1, u_2, u_3) = u_1u_2(1 - u_3) + u_1(1 - u_2)u_3 + (1 - u_1)u_2u_3$$

e

$$f_3^3(u_1, u_2, u_3) = u_1u_2u_3.$$

Allo stesso modo troviamo le funzioni  $g_j^2(v_1, v_2)$ , per  $j = 0, 1, 2$ :

$$g_0^2(v_1, v_2) = (1 - v_1)(1 - v_2),$$

$$g_1^2(v_1, v_2) = v_1(1 - v_2) + (1 - v_1)v_2,$$

$$g_2^2(v_1, v_2) = v_1v_2.$$

Così abbiamo che la funzione blossom risultante vale

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}[u_1, u_2, u_3 | v_1, v_2] &= \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^2 f_i^3(u_1, u_2, u_3) g_j^2(v_1, v_2) \mathbf{b}_{ij} \\
&= \sum_{i=0}^3 \left[ f_i^3 g_0^2 \mathbf{b}_{i0} + f_i^3 g_1^2 \mathbf{b}_{i1} + f_i^3 g_2^2 \mathbf{b}_{i2} \right] \\
&= f_0^3 g_0^2 \mathbf{b}_{00} + f_0^3 g_1^2 \mathbf{b}_{01} + f_0^3 g_2^2 \mathbf{b}_{02} \\
&\quad + f_1^3 g_0^2 \mathbf{b}_{10} + f_1^3 g_1^2 \mathbf{b}_{11} + f_1^3 g_2^2 \mathbf{b}_{12} \\
&\quad + f_2^3 g_0^2 \mathbf{b}_{20} + f_2^3 g_1^2 \mathbf{b}_{21} + f_2^3 g_2^2 \mathbf{b}_{22} \\
&\quad + f_3^3 g_0^2 \mathbf{b}_{30} + f_3^3 g_1^2 \mathbf{b}_{31} + f_3^3 g_2^2 \mathbf{b}_{32},
\end{aligned}$$

dove abbiamo per brevità ommesso gli argomenti delle funzioni  $f_i^3$  e  $g_j^2$ ,  $\forall i, j$ .



## 2.3 Definizione di una superficie di Bézier tramite blossom

Proprio per come sono stati definiti, i prodotti tensori blossom possono essere usati per definire le superfici di Bézier come le funzioni blossom possono essere usate per definire le curve di Bézier:

**Definizione 6.** Il blossom  $\mathbf{b}[u^{<m>} | v^{<n>}]$  è la funzione che dà la *superficie di Bézier* di bigrado  $(m, n)$  avente punti di controllo

$\mathbf{b}_{ij} = \mathbf{b}[1^{<i>}, 0^{<m-i>} | 1^{<j>}, 0^{<n-j>}]$  (se il dominio di tale funzione è  $[0, 1] \times [0, 1]$ ) e vale

$$\mathbf{b}[u^{<m>} | v^{<n>}] = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f_i^m(u^{<m>}) g_j^n(v^{<n>}) \mathbf{b}_{ij},$$

cioè

$$\mathbf{b}[u^{<m>} | v^{<n>}] = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) \mathbf{b}_{ij}. \quad (2.7)$$

Osserviamo che questa definizione è equivalente a quella data tramite il formalismo classico in (2.4). L'ordine delle valutazioni non modifica il risultato finale, cioè valutare i blossom prima sulle righe o prima sulle colonne della griglia associata al dominio non apporta differenze nella (2.7).

## 2.4 Alcune proprietà

Per parallelo con le proprietà delle curve che sono già state citate e discusse nel Capitolo 1, enunciamo ora tre proprietà significative delle superfici di Bézier.

**Le derivate.** I blossom possono poi essere usati per trovare derivate, esattamente come nel caso delle curve di Bézier. Si ottiene così che

$$\frac{\partial^{r+s} \mathbf{b}(u, v)}{\partial u^r \partial v^s} = \frac{m!}{(m-r)!} \frac{n!}{(n-s)!} \mathbf{b}[\vec{1}^{\langle r \rangle}, u^{\langle m-r \rangle} | \vec{1}^{\langle s \rangle}, v^{\langle n-s \rangle}].$$

Verifichiamo che questa scrittura è equivalente a quella standard in (2.5). Dobbiamo semplicemente dimostrare che

$$\mathbf{b}[\vec{1}^{\langle r \rangle}, u^{\langle m-r \rangle} | \vec{1}^{\langle s \rangle}, v^{\langle n-s \rangle}] = \sum_{i=0}^{m-r} \sum_{j=0}^{n-s} B_i^{m-r}(u) B_j^{n-s}(v) \Delta^{r,s}(\mathbf{b}_{ij}).$$

Per farlo, osserviamo che vale la seguente catena di uguaglianze, dove

$$\vec{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ come nel Capitolo precedente:}$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{b}[\vec{1}^{\langle r \rangle}, u^{\langle m-r \rangle} | \vec{1}^{\langle s \rangle}, v^{\langle n-s \rangle}] \\ &= \mathbf{b}[1^{\langle r \rangle}, u^{\langle m-r \rangle} | \vec{1}^{\langle s \rangle}, v^{\langle n-s \rangle}] - \mathbf{b}[0^{\langle r \rangle}, u^{\langle m-r \rangle} | \vec{1}^{\langle s \rangle}, v^{\langle n-s \rangle}] \\ &= \mathbf{b}[1^{\langle r \rangle}, u^{\langle m-r \rangle} | 1^{\langle s \rangle}, v^{\langle n-s \rangle}] - \mathbf{b}[1^{\langle r \rangle}, u^{\langle m-r \rangle} | 0^{\langle s \rangle}, v^{\langle n-s \rangle}] \\ &\quad - \mathbf{b}[0^{\langle r \rangle}, u^{\langle m-r \rangle} | 1^{\langle s \rangle}, v^{\langle n-s \rangle}] + \mathbf{b}[0^{\langle r \rangle}, u^{\langle m-r \rangle} | 0^{\langle s \rangle}, v^{\langle n-s \rangle}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{m-r} \sum_{j=0}^{n-s} B_i^{m-r}(u) B_j^{n-s}(v) \mathbf{b}_{i+r,j+s} - \sum_{i=0}^{m-r} \sum_{j=0}^{n-s} B_i^{m-r}(u) B_j^{n-s}(v) \mathbf{b}_{i+r,j} \\
&\quad - \sum_{i=0}^{m-r} \sum_{j=0}^{n-s} B_i^{m-r}(u) B_j^{n-s}(v) \mathbf{b}_{i,j+s} + \sum_{i=0}^{m-r} \sum_{j=0}^{n-s} B_i^{m-r}(u) B_j^{n-s}(v) \mathbf{b}_{i,j} \\
&= \sum_{i=0}^{m-r} \sum_{j=0}^{n-s} B_i^{m-r}(u) B_j^{n-s}(v) [\mathbf{b}_{i+r,j+s} - \mathbf{b}_{i+r,j} - \mathbf{b}_{i,j+s} + \mathbf{b}_{i,j}] \\
&\stackrel{(2.6)}{=} \sum_{i=0}^{m-r} \sum_{j=0}^{n-s} B_i^{m-r}(u) B_j^{n-s}(v) \Delta^{r,s}(\mathbf{b}_{ij}),
\end{aligned}$$

che dimostra l'equivalenza delle due notazioni.

**La suddivisione.** Si possono utilizzare i prodotti tensori blossom per il processo di suddivisione di una data superficie; in questo contesto, se il nuovo patch deve essere definito su un dominio rettangolare del tipo  $[a, b] \times [c, d] \subseteq [0, 1] \times [0, 1]$ , i punti di controllo del poliedro di Bézier sono dati da

$$\mathbf{c}_{ij} = \mathbf{b}[a^{\langle m-i \rangle}, b^{\langle i \rangle} | c^{\langle n-j \rangle}, d^{\langle j \rangle}]. \quad (2.8)$$

Abbiamo già visto che, in generale, i punti del poliedro di controllo sono

$$\mathbf{c}_{ij} = \mathbf{b}[0^{\langle m-i \rangle}, 1^{\langle i \rangle} | 0^{\langle n-j \rangle}, 1^{\langle j \rangle}].$$

Tuttavia, se si è in presenza di un generico dominio  $[a, b] \times [c, d]$ , è necessario operare dei cambiamenti di variabili:

$$\begin{aligned}
[a, b] &\longrightarrow [0, 1] \\
u &\longmapsto t = \frac{u - a}{b - a}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
[c, d] &\longrightarrow [0, 1] \\
v &\longmapsto s = \frac{v - c}{d - c}.
\end{aligned}$$

Perciò si ha che

$$\begin{aligned} t = 0 &\Leftrightarrow u = a, & t = 1 &\Leftrightarrow u = b, \\ s = 0 &\Leftrightarrow v = c, & s = 1 &\Leftrightarrow v = d, \end{aligned}$$

e quindi si ottiene la (2.8).

**La polare.** La *prima polare* di una data superficie di Bézier in un punto  $\mathbf{b}(u, v)$  è la superficie

$$\mathbf{o}(s, t) = \mathbf{b}[u, s^{<m-1>} | v, t^{<n-1>}];$$

Questa definizione è totalmente analoga a quella della prima polare di una curva di Bézier; qui, a differenza di quanto fatto nel Capitolo 1, si considera un *poliedro* di controllo costituito dai punti generati dal primo passo dell'algoritmo di de Casteljau rispetto a una *coppia* di parametri fissati  $(u, v)$  e se ne determina la superficie corrispondente in funzione di  $(s, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$ .

In numerose applicazioni, data una certa superficie di Bézier definita tramite i punti del suo poliedro di controllo, si richiede di trovare un punto su tale superficie e le derivate parziali rispetto a  $u$  e a  $v$  valutate in esso. Grazie al formalismo blossom possiamo definire una *superficie osculante* in un punto  $\mathbf{b}(u, v)$  in questo modo:

$$\mathbf{t}(s, t) = \mathbf{b}[u^{<m-1>}, s | v^{<n-1>}, t]. \quad (2.9)$$

Tramite questa si possono calcolare entrambe le derivate della funzione  $\mathbf{b}(u, v)$ . Vediamo il semplice algoritmo per farlo, immaginando di suddividere il dominio su cui è definito il blossom in una griglia con  $m$  righe e  $n$  colonne:

1. Si effettuano le valutazioni del blossom rispetto ad  $u$  per tutte le righe dei punti di controllo, fermandosi al livello  $m - 1$ . Si ottengono perciò due punti per riga.

2. Si valutano i blossom rispetto a  $v$  per le due colonne di punti ottenute nel punto precedente e ci si ferma al livello  $n - 1$ . Si sono così ottenuti i quattro punti del poligono di controllo di  $\mathbf{t}(u, v)$ , corrispondenti all'osculante (2.9), che definiamo come  $\mathbf{t}_{00}$ ,  $\mathbf{t}_{01}$ ,  $\mathbf{t}_{10}$ ,  $\mathbf{t}_{11}$ .
3. Le derivate cercate sono perciò:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{b}(u, v)}{\partial u} &= m([(1-v)\mathbf{t}_{10} + v\mathbf{t}_{11}] - [(1-v)\mathbf{t}_{00} + v\mathbf{t}_{01}]) \\ \frac{\partial \mathbf{b}(u, v)}{\partial v} &= m([(1-u)\mathbf{t}_{10} + u\mathbf{t}_{00}] - [(1-u)\mathbf{t}_{11} + v\mathbf{t}_{01}]).\end{aligned}$$

## 2.5 Curve di Bézier su una superficie di Bézier

Vediamo come si possono definire alcune curve su una superficie di Bézier. Siano  $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v)$  e  $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_u, \mathbf{q}_v)$  le coordinate di due punti nel dominio di un patch tensoriale di bigrado  $(n, n)$ . Sappiamo che la forma parametrica di un segmento avente come punti iniziale e finale  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$  è

$$\mathbf{u}(t) = (1-t)\mathbf{p} + t\mathbf{q}, \quad \text{dove } t \in [0, 1].$$

Tale segmento viene mappato in un tratto di curva sulla superficie. Vogliamo mostrare che tale curva è una curva di Bézier. A tal fine definiremo i punti del suo poligono di controllo  $\mathbf{c}_k$ . Come obiettivo ci poniamo di mostrare che la curva di Bézier con punti di controllo  $\mathbf{c}_k$  corrisponde all'immagine della curva  $\mathbf{u}(t)$ .

Sia  $\mathbf{b}[u_1, \dots, u_n | v_1, \dots, v_n]$  il blossom che definisce la superficie considerata. Allora si ha che un punto della curva è dato da

$$\mathbf{b}[(1-t)\mathbf{p}_u + t\mathbf{q}_u]^{<n>} | [(1-t)\mathbf{p}_v + t\mathbf{q}_v]^{<n>}, \quad t \in [0, 1]. \quad (2.10)$$

Applichiamo la formula di Leibniz a (2.10) nella parte in  $u$ . Otteremo

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i \mathbf{b}[\mathbf{p}_u^{<i>}, \mathbf{q}_u^{<n-i>} | [(1-t)\mathbf{p}_v + t\mathbf{q}_v]^{<n>}].$$

Se adesso applichiamo nuovamente la formula di Leibniz alla parte in  $v$  si otterrà

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \binom{n}{i} \binom{n}{j} (1-t)^{n-i} t^i (1-t)^{n-j} t^j \mathbf{b}[\mathbf{p}_u^{<i>}, \mathbf{q}_u^{<n-i>} | \mathbf{p}_v^{<j>}, \mathbf{q}_v^{<n-j>}].$$

Cioè:

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \binom{n}{i} \binom{n}{j} (1-t)^{2n-i-j} t^{i+j} \mathbf{b}[\mathbf{p}_u^{<i>}, \mathbf{q}_u^{<n-i>} | \mathbf{p}_v^{<j>}, \mathbf{q}_v^{<n-j>}],$$

o in alternativa, riorganizzando le sommatorie,

$$\sum_{k=0}^{2n} \sum_{i+j=k} \frac{\binom{n}{i} \binom{n}{j}}{\binom{2n}{k}} B_k^{2n}(t) \mathbf{b}[\mathbf{p}_u^{<i>}, \mathbf{q}_u^{<n-i>} | \mathbf{p}_v^{<j>}, \mathbf{q}_v^{<n-j>}].$$

Definiamo ora per  $k = 0, 1, \dots, n$

$$\mathbf{c}_k = \sum_{i+j=k} \frac{\binom{n}{i} \binom{n}{j}}{\binom{2n}{k}} \mathbf{b}[\mathbf{p}_u^{<i>}, \mathbf{q}_u^{<n-i>} | \mathbf{p}_v^{<j>}, \mathbf{q}_v^{<n-j>}]. \quad (2.11)$$

Tali punti sono i punti del poligono di controllo della curva ottenuta mappando il segmento considerato sulla superficie di Bézier.

Verifichiamo che la curva di Bézier avente tali punti di controllo è esattamente quella che si ottiene mappando  $\mathbf{u}(t)$  sulla superficie. Per farlo, osserviamo che possiamo trasformare  $[\mathbf{p}_u, \mathbf{q}_u] \times [\mathbf{p}_v, \mathbf{q}_v]$ , cioè il dominio del patch tensoriale ristretto alla regione contenente  $\mathbf{u}(t)$ , in  $[0, 1] \times [0, 1]$  tramite una trasformazione affine, e di conseguenza possiamo esprimere  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$  con nuove coordinate in un altro sistema di riferimento, come si può osservare in Figura 2.3:

$$\begin{aligned} (\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v) &\mapsto (0, 0), \\ (\mathbf{q}_u, \mathbf{q}_v) &\mapsto (1, 1). \end{aligned}$$

Si ha perciò che

$$\begin{aligned} (1-t)\mathbf{p}_u + t\mathbf{q}_u &\mapsto t, \\ (1-t)\mathbf{p}_v + t\mathbf{q}_v &\mapsto t. \end{aligned} \quad (2.12)$$



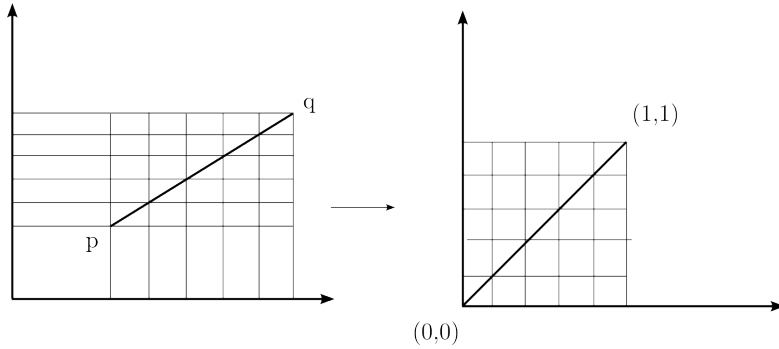


Figura 2.3: Cambiamento di sistema di riferimento del dominio del patch

Dunque abbiamo che vale la seguente catena di uguaglianze:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}[\langle (1-t)\mathbf{p}_u + t\mathbf{q}_u \rangle^{<n>} | \langle (1-t)\mathbf{p}_v + t\mathbf{q}_v \rangle^{<n>}] &\stackrel{(2.12)}{=} \mathbf{b}[t^{<n>} | t^{<n>}] \\
 &\stackrel{(2.7)}{=} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \binom{n}{i} \binom{n}{j} (1-t)^{n-i} t^i (1-t)^{n-j} t^j \mathbf{b}_{ij} \\
 &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \binom{n}{i} \binom{n}{j} (1-t)^{2n-i-j} t^{i+j} \mathbf{b}_{ij} \\
 &= \sum_{k=0}^{2n} \left[ \sum_{i+j=k} \frac{\binom{n}{i} \binom{n}{j}}{\binom{2n}{k}} \mathbf{b}_{ij} \right] \binom{2n}{k} (1-t)^{2n-i-j} t^{i+j} \\
 &= \sum_{k=0}^{2n} \left[ \sum_{i+j=k} \frac{\binom{n}{i} \binom{n}{j}}{\binom{2n}{k}} \mathbf{b}_{ij} \right] B_k^{2n}(t),
 \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}_{ij} &= \mathbf{b}[0^{<i>}, 1^{<n-i>} | 0^{<j>}, 1^{<n-j>}] \\
 &= \mathbf{b}[\mathbf{p}_u^{<i>}, \mathbf{q}_u^{<n-i>} | \mathbf{p}_v^{<j>}, \mathbf{q}_v^{<n-j>}].
 \end{aligned}$$

Abbiamo così verificato che la curva sulla superficie coincide con la curva di Bézier avente punti del poligono di controllo (2.11).

*Esempio 4.* Consideriamo una superficie di Bézier di bigrado (2, 2) avente come punti del poliedro di controllo i seguenti

$$\mathbf{c}_{ij} = \mathbf{b}[\mathbf{p}_u^{<i>}, \mathbf{q}_u^{<2-i>} | \mathbf{p}_v^{<j>}, \mathbf{q}_v^{<2-j>}].$$

I punti del poligono di controllo che definiscono la curva che ha come punto iniziale  $\mathbf{p}$  e come punto finale  $\mathbf{q}$  sono perciò:

$$\mathbf{c}_0 = \frac{\binom{2}{0}\binom{2}{0}}{\binom{4}{0}}\mathbf{c}_{00} = \mathbf{b}[\mathbf{p}_u^{<0>}, \mathbf{q}_u^{<2>} | \mathbf{p}_v^{<0>}, \mathbf{q}_v^{<2>}],$$

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_1 &= \frac{\binom{2}{1}\binom{2}{0}}{\binom{4}{1}}\mathbf{c}_{10} + \frac{\binom{2}{0}\binom{2}{1}}{\binom{4}{1}}\mathbf{c}_{01} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \mathbf{b}[\mathbf{p}_u^{<1>}, \mathbf{q}_u^{<1>} | \mathbf{p}_v^{<0>}, \mathbf{q}_v^{<2>}] + \mathbf{b}[\mathbf{p}_u^{<0>}, \mathbf{q}_u^{<2>} | \mathbf{p}_v^{<1>}, \mathbf{q}_v^{<1>}] \right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_2 &= \frac{\binom{2}{2}\binom{2}{0}}{\binom{4}{2}}\mathbf{c}_{20} + \frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{4}{2}}\mathbf{c}_{11} + \frac{\binom{2}{0}\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}}\mathbf{c}_{02} \\ &= \frac{1}{6} \left[ \mathbf{b}[\mathbf{p}_u^{<2>}, \mathbf{q}_u^{<0>} | \mathbf{p}_v^{<0>}, \mathbf{q}_v^{<2>}] + \mathbf{b}[\mathbf{p}_u^{<0>}, \mathbf{q}_u^{<2>} | \mathbf{p}_v^{<2>}, \mathbf{q}_v^{<0>}] \right] \\ &\quad + \frac{1}{3} \mathbf{b}[\mathbf{p}_u^{<1>}, \mathbf{q}_u^{<1>} | \mathbf{p}_v^{<1>}, \mathbf{q}_v^{<1>}],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_3 &= \frac{\binom{2}{2}\binom{2}{1}}{\binom{4}{3}}\mathbf{c}_{21} + \frac{\binom{2}{1}\binom{2}{2}}{\binom{4}{3}}\mathbf{c}_{12} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \mathbf{b}[\mathbf{p}_u^{<2>}, \mathbf{q}_u^{<0>} | \mathbf{p}_v^{<1>}, \mathbf{q}_v^{<1>}] + \mathbf{b}[\mathbf{p}_u^{<1>}, \mathbf{q}_u^{<1>} | \mathbf{p}_v^{<2>}, \mathbf{q}_v^{<0>}] \right],\end{aligned}$$

$$\mathbf{c}_4 = \frac{\binom{2}{2}\binom{2}{2}}{\binom{4}{4}}\mathbf{c}_{22} = \mathbf{b}[\mathbf{p}_u^{<2>}, \mathbf{q}_u^{<0>} | \mathbf{p}_v^{<2>}, \mathbf{q}_v^{<0>}].$$



## Capitolo 3

# I triangoli di Bézier

Quando, nel 1959, comparirono per la prima volta le curve di Bézier, de Casteljaou si accorse che sarebbe stato opportuno estendere i concetti già introdotti per le curve al caso di superfici. Le prime superfici che comparirono non furono tuttavia i prodotti tensori di curve di Bézier di cui abbiamo parlato nella sezione precedente, bensì i cosiddetti triangoli di Bézier. Essi sono infatti una più naturale generalizzazione della teoria relativa alle curve ed ebbero fin da subito numerose applicazioni nel CAGD. L'obiettivo è approssimare superfici più complesse con delle triangolazioni regolari sempre più fini e a tale scopo i blossom introdotti nel Capitolo 1 opportunamente modificati risulteranno molto utili.

### 3.1 L'algoritmo di de Casteljaou per triangoli di Bézier

L'algoritmo di de Casteljaou per patch triangolari è una generalizzazione del corrispondente algoritmo per le curve: anche in questo caso l'idea di base è l'interpolazione lineare ripetuta. In generale, la rete di controllo alla base dell'algoritmo consiste di  $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$  vertici e ha una struttura triangolare. Per un  $n$  generico, i punti del poliedro di controllo sono del tipo  $\mathbf{b}_{ijk}$ , dove  $i + j + k = n$ . Prendiamo per esempio in considerazione il caso  $n = 4$ ; la

somma degli indici di ciascun vertice è 4:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & \mathbf{b}_{040} \\
 & & & & & & \mathbf{b}_{031} & \mathbf{b}_{130} \\
 & & & & & & \mathbf{b}_{022} & \mathbf{b}_{121} & \mathbf{b}_{220} \\
 & & & & & & \mathbf{b}_{013} & \mathbf{b}_{112} & \mathbf{b}_{211} & \mathbf{b}_{310} \\
 & & & & & & \mathbf{b}_{004} & \mathbf{b}_{103} & \mathbf{b}_{202} & \mathbf{b}_{301} & \mathbf{b}_{400}
 \end{array}$$

Prima di enunciare formalmente l'algoritmo di de Casteljau, introduciamo qualche notazione che verrà usata nel seguito. Assumendo  $i, j, k \geq 0$  indichiamo i vertici del poliedro di controllo  $\mathbf{b}_{ijk}$  con  $\mathbf{b}_{\mathbf{i}}$ , dove  $\mathbf{i}$  è un multiindice che significa  $(i, j, k)$ . Inoltre si intenderà  $|\mathbf{i}| = i + j + k$ . Infine, per comodità, si userà  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$  ed  $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$  e  $n$  sarà il grado della superficie considerata.

Passiamo ora all'algoritmo. Siano dati dei punti  $\mathbf{b}_{\mathbf{i}}$  in  $\mathbb{E}^3$  con  $|\mathbf{i}| = n$  e una terna  $\mathbf{u} = (u, v, w)$  che indica coordinate baricentriche, cioè una terna di numeri reali non negativi che, dati i vertici di un triangolo  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$  di  $\mathbb{E}^3$ , permette di definire un generico punto  $\mathbf{p}$  del triangolo nel modo seguente:

$$\begin{cases} \mathbf{p} = u\mathbf{a} + v\mathbf{b} + w\mathbf{c} \\ u + v + w = 1. \end{cases}$$

**Definizione 7.** Una *superficie triangolare di Bézier* è una funzione  $\mathbf{b} : A \rightarrow \mathbb{E}^3$ , dove  $A = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 | u + v + w = 1\}$ , definita da un algoritmo ricorsivo che si chiama ancora algoritmo di de Casteljau a partire da un poliedro di controllo  $\{\mathbf{b}_{\mathbf{i}}\}$  con  $|\mathbf{i}| = n$ . A partire dai vertici del poliedro di controllo è possibile determinare una successione di poliedri intermedi nel modo seguente. Per  $r = 1, \dots, n$  e  $|\mathbf{i}| = n - r$  si ha

$$\mathbf{b}_{\mathbf{i}}^r(\mathbf{u}) = u\mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_1}^{r-1}(\mathbf{u}) + v\mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_2}^{r-1}(\mathbf{u}) + w\mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_3}^{r-1}(\mathbf{u}), \quad (3.1)$$

che rappresenta il passo induttivo dell'algoritmo di de Casteljau, dove si intende ovviamente che  $\mathbf{b}_{\mathbf{i}}^0(\mathbf{u}) = \mathbf{b}_{\mathbf{i}}$ . Si ha infine che  $\mathbf{b}_{000}^n(\mathbf{u})$  indica il valore della funzione  $\mathbf{b}(\mathbf{u})$  che stiamo definendo.

Si noti che il punto  $\mathbf{b}_i^r(\mathbf{u})$  al livello  $r$  è definito come combinazione baricentrica di tre punti che appartengono al poliedro di controllo triangolare di livello  $r - 1$ , costituito da  $\mathbf{b}_{i+\mathbf{e}_1}^{r-1}(\mathbf{u})$ ,  $\mathbf{b}_{i+\mathbf{e}_2}^{r-1}(\mathbf{u})$  e  $\mathbf{b}_{i+\mathbf{e}_3}^{r-1}(\mathbf{u})$ .

Per chiarezza facciamo un esempio per  $n = 3$ . Il primo passo dell'algoritmo, cioè  $r = 1$ , produce le seguenti funzioni intermedie:

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_{002}^1(\mathbf{u}) &= u\mathbf{b}_{102} + v\mathbf{b}_{012} + w\mathbf{b}_{003} \\ \mathbf{b}_{101}^1(\mathbf{u}) &= u\mathbf{b}_{201} + v\mathbf{b}_{111} + w\mathbf{b}_{102} \\ \mathbf{b}_{200}^1(\mathbf{u}) &= u\mathbf{b}_{300} + v\mathbf{b}_{210} + w\mathbf{b}_{201} \\ \mathbf{b}_{011}^1(\mathbf{u}) &= u\mathbf{b}_{111} + v\mathbf{b}_{021} + w\mathbf{b}_{012} \\ \mathbf{b}_{110}^1(\mathbf{u}) &= u\mathbf{b}_{210} + v\mathbf{b}_{120} + w\mathbf{b}_{111} \\ \mathbf{b}_{020}^1(\mathbf{u}) &= u\mathbf{b}_{120} + v\mathbf{b}_{030} + w\mathbf{b}_{021}.\end{aligned}$$

Passiamo al livello  $r = 2$ : utilizzando le funzioni precedenti e procedendo a farne la combinazione baricentrica si ottiene

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_{001}^2(\mathbf{u}) &= u\mathbf{b}_{101}^1(\mathbf{u}) + v\mathbf{b}_{011}^1(\mathbf{u}) + w\mathbf{b}_{002}^1(\mathbf{u}) \\ \mathbf{b}_{100}^2(\mathbf{u}) &= u\mathbf{b}_{200}^1(\mathbf{u}) + v\mathbf{b}_{110}^1(\mathbf{u}) + w\mathbf{b}_{101}^1(\mathbf{u}) \\ \mathbf{b}_{010}^2(\mathbf{u}) &= u\mathbf{b}_{110}^1(\mathbf{u}) + v\mathbf{b}_{020}^1(\mathbf{u}) + w\mathbf{b}_{011}^1(\mathbf{u}).\end{aligned}$$

Infine, con  $r = 3$ , otteniamo il punto sul patch triangolare:

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_{000}^3(\mathbf{u}) &= u\mathbf{b}_{100}^2(\mathbf{u}) + v\mathbf{b}_{010}^2(\mathbf{u}) + w\mathbf{b}_{001}^2(\mathbf{u}) \\ &= u^2\mathbf{b}_{200}^1(\mathbf{u}) + uv\mathbf{b}_{110}^1(\mathbf{u}) + uw\mathbf{b}_{101}^1(\mathbf{u}) \\ &\quad + uv\mathbf{b}_{110}^1(\mathbf{u}) + v^2\mathbf{b}_{020}^1(\mathbf{u}) + vw\mathbf{b}_{011}^1(\mathbf{u}) \\ &\quad + uw\mathbf{b}_{101}^1(\mathbf{u}) + vw\mathbf{b}_{011}^1(\mathbf{u}) + w^2\mathbf{b}_{002}^1(\mathbf{u}) \\ &= u^3\mathbf{b}_{300} + u^2v\mathbf{b}_{210} + u^2w\mathbf{b}_{201} \\ &\quad + 2u^2v\mathbf{b}_{210} + 2uv^2\mathbf{b}_{120} + 2uvw\mathbf{b}_{111} \\ &\quad + 2u^2w\mathbf{b}_{201} + 2uvw\mathbf{b}_{111} + 2uw^2\mathbf{b}_{102} \\ &\quad + uv^2\mathbf{b}_{120} + v^3\mathbf{b}_{030} + v^2w\mathbf{b}_{021}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2uvw\mathbf{b}_{111} + 2v^2w\mathbf{b}_{021} + 2vw^2\mathbf{b}_{012} \\
& + uw^2\mathbf{b}_{102} + vw^2\mathbf{b}_{012} + w^3\mathbf{b}_{003} \\
& = u^3\mathbf{b}_{300} + v^3\mathbf{b}_{030} + w^3\mathbf{b}_{003} + 3u^2v\mathbf{b}_{210} \\
& + 3u^2w\mathbf{b}_{201} + 3uv^2\mathbf{b}_{120} + 3uw^2\mathbf{b}_{102} + 3v^2w\mathbf{b}_{021} \\
& + 3vw^2\mathbf{b}_{012} + 6uvw\mathbf{b}_{111}. \tag{3.2}
\end{aligned}$$

*Esempio 5.* Calcoliamo con un esempio concreto un punto di un patch triangolare di grado  $n = 2$  con l'algoritmo di de Casteljau. Fissiamo  $\mathbf{u} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  e il poliedro di controllo sia

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_{020} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{b}_{011} &= \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix} & \mathbf{b}_{110} &= \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \\
\mathbf{b}_{002} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \mathbf{b}_{101} &= \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \mathbf{b}_{200} &= \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Per  $r = 1$  troviamo le seguenti funzioni intermedie dell'algoritmo, valutate in  $\mathbf{u}$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_{001}^1(\mathbf{u}) &= \frac{1}{3}\mathbf{b}_{101} + \frac{1}{3}\mathbf{b}_{011} + \frac{1}{3}\mathbf{b}_{002} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{b}_{010}^1(\mathbf{u}) &= \frac{1}{3}\mathbf{b}_{110} + \frac{1}{3}\mathbf{b}_{020} + \frac{1}{3}\mathbf{b}_{011} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{b}_{100}^1(\mathbf{u}) &= \frac{1}{3}\mathbf{b}_{101} + \frac{1}{3}\mathbf{b}_{011} + \frac{1}{3}\mathbf{b}_{002} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Dunque:

$$\mathbf{b}_{000}^2(\mathbf{u}) = \frac{1}{3}\mathbf{b}_{100}^1(\mathbf{u}) + \frac{1}{3}\mathbf{b}_{010}^1(\mathbf{u}) + \frac{1}{3}\mathbf{b}_{001}^1(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 10/3 \\ 11/3 \\ 7/3 \end{bmatrix}.$$



Osserviamo che, diversamente dal caso delle curve, per identificare le funzioni intermedie dell'algoritmo nel caso triangolare è necessario utilizzare tre coordinate. Una superficie triangolare di Bézier viene detta anche *triangolo di Bézier* o patch triangolare di Bézier.

## 3.2 Proprietà dei triangoli di Bézier

Di nuovo, come per le curve di Bézier, a partire dall'algoritmo sopra discusso, si possono enunciare molte proprietà riguardanti i triangoli di Bézier, che si provano in modo analogo a quanto fatto nel Capitolo 1 (si veda [1]).

**Invarianza per affinità.** Poiché l'algoritmo di de Casteljau utilizza unicamente l'interpolazione lineare e quest'ultima è una mappa affine, segue facilmente che i triangoli di Bézier sono invarianti per affinità. In particolare, le combinazioni baricentriche sono invarianti per affinità. Vediamo cosa significa. Consideriamo un punto  $\mathbf{p}$  avente coordinate baricentriche  $(u, v, w)$  rispetto ad  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$ . Ora tramite una mappa affine  $\phi$  mandiamo il triangolo  $\mathbf{abc}$  in un altro triangolo  $\phi\mathbf{a}\phi\mathbf{b}\phi\mathbf{c}$ . Si ha che  $\phi\mathbf{p}$  ha le stesse coordinate baricentriche  $(u, v, w)$  rispetto a  $\phi\mathbf{a}$ ,  $\phi\mathbf{b}$  e  $\phi\mathbf{c}$ . Questo deriva dalla proprietà (1.6) dei polinomi di Bernstein.

**Invarianza per trasformazioni affini delle coordinate baricentriche.**

In seguito a una trasformazione affine del dominio triangolare, le coordinate baricentriche rimangono uguali.

**Convessità dell'involucro del poliedro di controllo.** Siccome

$0 \leq u, v, w \leq 1$  e ogni  $\mathbf{b}_i^r(\mathbf{u})$  è combinazione baricentrica di tre punti della rete di controllo di livello  $r - 1$  rispetto a  $\mathbf{u} = (u, v, w)$ , si ha che questa combinazione è convessa. Perciò, poichè ad ogni passo dell'algoritmo di de Casteljau i punti dei poliedri di controllo sono generati a partire da combinazioni convesse, ogni superficie triangolare di Bézier è contenuta nell'involucro convesso del suo poliedro di controllo.

**Curve di bordo.** Per patch triangolari, queste sono determinate dai vertici di controllo corrispondenti ai tre lati della rete. Tali curve sono proprio curve di Bézier.

### 3.3 Blossom triangolari

Nel Capitolo 1 abbiamo introdotto il concetto di blossom per le curve di Bézier; questo era stato definito come una funzione con determinate proprietà, che abbiamo poi usato per descrivere le curve di Bézier. Estenderemo ora questo concetto al caso dei triangoli di Bézier, come abbiamo fatto per le superfici di Bézier, osservando che, a differenza di quanto fatto nel Capitolo 1, i blossom triangolari vengono definiti relativamente a un particolare patch triangolare. Si ha dunque che, data una superficie triangolare di Bézier, possiamo ricavare la funzione blossom che la descrive, ma non è vero che tale funzione esiste come oggetto analitico a sé stante.

**Definizione 8.** Chiamiamo *blossom di un patch triangolare*  $\mathbf{b}(\mathbf{u})$  di grado  $n$  il polinomio a  $n$  variabili  $\mathbf{b}[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n]$ , dove le  $\mathbf{u}_i$  sono coordinate

baricentriche in tre componenti (cioè tali che  $\mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} u_{i1} \\ u_{i2} \\ u_{i3} \end{bmatrix}$ ) e dove

$$\mathbf{b} : \underbrace{\mathbb{R}^3 \times \dots \times \mathbb{R}^3}_{n \text{ volte}} \longrightarrow \mathbb{E}^3,$$

è definita nel modo seguente:

$$\mathbf{b}[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n] = \sum_{i+j+k=n} f_{ijk}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) \mathbf{b}_{ijk}, \quad (3.3)$$

dove  $\mathbf{b}_{ijk}$  sono i punti di controllo del patch di Bézier e  $f_{ijk}$  è la funzione seguente:

$$f_{ijk} : \underbrace{\mathbb{R}^3 \times \dots \times \mathbb{R}^3}_{n \text{ volte}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f_{ijk}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) = \sum (u_{1t_1} \cdot u_{2t_2} \cdot \dots \cdot u_{nt_n}),$$



dove la somma è al variare di tutte le possibili permutazioni  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$  della  $n$ -upla costituita da tanti 1 quanto vale  $i$ , tanti 2 quanto vale  $j$  e tanti 3 quanto vale  $k$ .

*Esempio 6.* Facciamo un esempio con  $n = 3$  per chiarezza. Si ha che

$$\mathbf{b}[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3] = \sum_{i+j+k=3} f_{ijk}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) \mathbf{b}_{ijk}.$$

Ora passiamo a definire le funzioni  $f_{ijk}$  al variare di  $i, j$  e  $k$ :

$$\begin{aligned} f_{300} &= u_{11}u_{21}u_{31} \\ f_{030} &= u_{12}u_{22}u_{32} \\ f_{003} &= u_{13}u_{23}u_{33} \\ f_{210} &= u_{11}u_{21}u_{32} + u_{11}u_{22}u_{31} + u_{12}u_{21}u_{31} \\ f_{201} &= u_{11}u_{21}u_{33} + u_{11}u_{23}u_{31} + u_{13}u_{21}u_{31} \\ f_{120} &= u_{11}u_{22}u_{32} + u_{12}u_{21}u_{32} + u_{12}u_{22}u_{31} \\ f_{102} &= u_{11}u_{23}u_{33} + u_{13}u_{21}u_{33} + u_{13}u_{23}u_{31} \\ f_{021} &= u_{12}u_{22}u_{33} + u_{12}u_{23}u_{32} + u_{13}u_{22}u_{32} \\ f_{012} &= u_{12}u_{23}u_{33} + u_{13}u_{22}u_{33} + u_{13}u_{23}u_{32} \\ f_{111} &= u_{11}u_{22}u_{33} + u_{11}u_{23}u_{32} + u_{12}u_{21}u_{33} \\ &\quad + u_{12}u_{23}u_{31} + u_{13}u_{21}u_{32} + u_{13}u_{22}u_{31}. \end{aligned}$$

Si ha così che il blossom ricercato vale

$$\begin{aligned} \mathbf{b}[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3] &= f_{300} \mathbf{b}_{300} + f_{030} \mathbf{b}_{030} + f_{003} \mathbf{b}_{003} \\ &\quad + f_{210} \mathbf{b}_{210} + f_{201} \mathbf{b}_{201} + f_{120} \mathbf{b}_{120} \\ &\quad + f_{102} \mathbf{b}_{102} + f_{021} \mathbf{b}_{021} + f_{012} \mathbf{b}_{012} \\ &\quad + f_{111} \mathbf{b}_{111}, \end{aligned}$$

dove si sono omessi per brevità gli argomenti delle funzioni  $f_{ijk}$



Osserviamo che il blossom triangolare possiede le proprietà seguenti:

- coincide con la funzione che definisce la superficie triangolare da cui proviene se tutti gli argomenti del blossom sono uguali, cioè  $\mathbf{b}(\mathbf{u}) = \mathbf{b}[\mathbf{u}^{<n>}]$ ; per esempio, nel caso  $n = 3$ , se  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ , la funzione:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}[\mathbf{u}^{<n>}] &= u_1^3 \mathbf{b}_{300} + u_2^3 \mathbf{b}_{030} + u_3^3 \mathbf{b}_{003} + 3u_1^2 u_2 \mathbf{b}_{210} \\ &\quad + 3u_1^2 u_3 \mathbf{b}_{201} + 3u_1 u_2^2 \mathbf{b}_{120} + 3u_1 u_3^2 \mathbf{b}_{102} + 3u_2^2 u_3 \mathbf{b}_{021} \\ &\quad + 3u_2 u_3^2 \mathbf{b}_{012} + 6u_1 u_2 u_3 \mathbf{b}_{111} \end{aligned}$$

coincide con la (3.2).

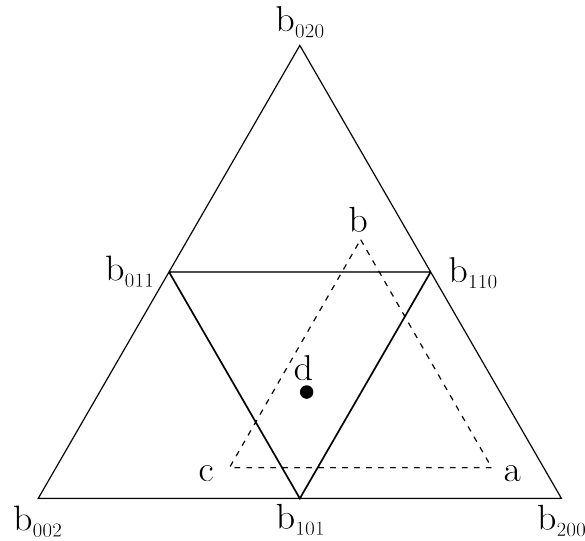
- è multiaffine, per come è definito il blossom;
- $\mathbf{u}_i$  sono coordinate baricentriche e perciò soddisfano la proprietà  $u_{i1} + u_{i2} + u_{i3} = 1 \forall i$ ;
- il blossom è simmetrico. Verifichiamo questa proprietà nel caso in cui  $n = 2$ ; la superficie di Bézier ha sei punti di controllo  $\mathbf{b}_i$  e si considerano le due coordinate baricentriche  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$  e  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ . Vogliamo verificare che  $\mathbf{b}[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \mathbf{b}[\mathbf{v}, \mathbf{u}]$ . Iniziamo a costruire  $\mathbf{b}[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ , facendo riferimento alla Figura 3.1. Definiamo i punti intermedi dell'algoritmo di de Casteljau relativi alla coordinata baricentrica  $\mathbf{u}$  nel modo seguente:

$$\mathbf{a} = u_1 \mathbf{b}_{200} + u_2 \mathbf{b}_{110} + u_3 \mathbf{b}_{101}$$

$$\mathbf{b} = u_1 \mathbf{b}_{110} + u_2 \mathbf{b}_{020} + u_3 \mathbf{b}_{011}$$

$$\mathbf{c} = u_1 \mathbf{b}_{101} + u_2 \mathbf{b}_{011} + u_3 \mathbf{b}_{002}.$$

Facendo poi la combinazione di  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$  tramite la coordinata baricen-

Figura 3.1: *Blossom triangolare*

trica  $\mathbf{v}$  si ottiene

$$\begin{aligned}
 \mathbf{d} &= v_1 \mathbf{a} + v_2 \mathbf{b} + v_3 \mathbf{c} \\
 &= u_1 v_1 \mathbf{b}_{200} + u_2 v_1 \mathbf{b}_{110} + u_3 v_1 \mathbf{b}_{101} + \\
 &u_1 v_2 \mathbf{b}_{110} + u_2 v_2 \mathbf{b}_{020} + u_3 v_2 \mathbf{b}_{011} + \\
 &u_1 v_3 \mathbf{b}_{101} + u_2 v_3 \mathbf{b}_{011} + u_3 v_3 \mathbf{b}_{002} \\
 &= u_3 v_3 \mathbf{b}_{002} + u_2 v_2 \mathbf{b}_{020} + u_1 v_1 \mathbf{b}_{200} \\
 &+ (u_3 v_2 + u_2 v_3) \mathbf{b}_{011} + (u_2 v_1 + u_1 v_2) \mathbf{b}_{110} + (u_1 v_3 + u_3 v_1) \mathbf{b}_{101}.
 \end{aligned}$$

Se ripetiamo i passaggi precedenti calcolando prima  $\mathbf{a}'$ ,  $\mathbf{b}'$  e  $\mathbf{c}'$  come combinazioni rispetto a  $\mathbf{v}$  e ricavando poi  $\mathbf{d}'$  a partire da questi ultimi e da  $\mathbf{u}$  si ottiene che  $\mathbf{d} = \mathbf{d}'$ :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}' &= v_1 \mathbf{b}_{200} + v_2 \mathbf{b}_{110} + v_3 \mathbf{b}_{101} \\
 \mathbf{b}' &= v_1 \mathbf{b}_{110} + v_2 \mathbf{b}_{020} + v_3 \mathbf{b}_{011} \\
 \mathbf{c}' &= v_1 \mathbf{b}_{101} + v_2 \mathbf{b}_{011} + v_3 \mathbf{b}_{002} \\
 \mathbf{d}' &= u_1 \mathbf{a}' + u_2 \mathbf{b}' + u_3 \mathbf{c}' = \mathbf{d}.
 \end{aligned}$$

Consideriamo ora un caso particolare:  $\mathbf{b}[\mathbf{e}_1, \mathbf{u}^{<n-1>}]$  corrisponde a un patch triangolare di grado  $n$ , i cui vertici coincidono con quelli originali ec-

cetto per i punti del tipo  $\mathbf{b}_{0,j,k}$ . Infatti, il valore della funzione si ottiene effettuando prima un passo dell'algoritmo di de Casteljau rispetto a  $\mathbf{e}_1$  e poi  $n - 1$  passi rispetto a  $\mathbf{u}$ . Nel primo passo si ha

$$\mathbf{b}_i(\mathbf{e}_1) = \mathbf{b}_{i+1,j,k}, \quad |\mathbf{i}| = n - 1. \quad (3.4)$$

In tal modo un riga di vertici di controllo viene eliminata. Se, per esempio, consideriamo il caso  $n = 2$ , abbiamo come punti appartenenti al poliedro di controllo iniziale  $\mathbf{b}_{002}$ ,  $\mathbf{b}_{101}$ ,  $\mathbf{b}_{200}$ ,  $\mathbf{b}_{011}$ ,  $\mathbf{b}_{110}$  e  $\mathbf{b}_{020}$ . Se applichiamo (3.4) ad essi, otteniamo:

$$\mathbf{b}_{001}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{b}_{101}$$

$$\mathbf{b}_{010}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{b}_{110}$$

$$\mathbf{b}_{100}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{b}_{200}$$

Abbiamo così ridotto la rete triangolare di partenza a una con una 'riga in meno'. Si veda a tal proposito la figura 3.2, dove indichiamo con un tratto più marcato la rete triangolare dopo aver applicato un passo dell'algoritmo rispetto alla coordinata baricentrica  $\mathbf{e}_1$ .

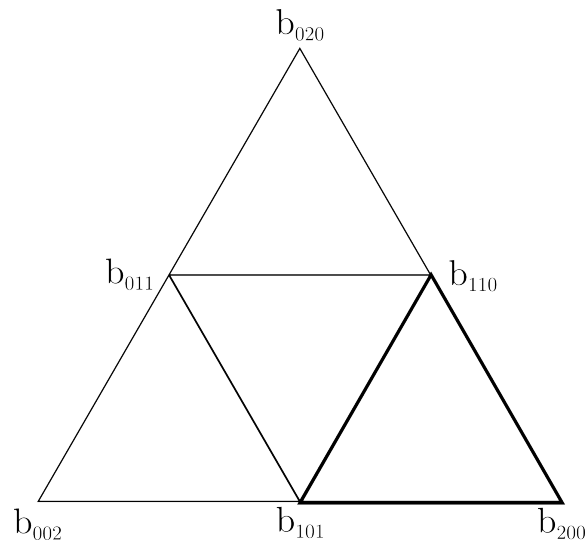


Figura 3.2: *Cancellazione di una riga di vertici di controllo*

Un'ulteriore osservazione: a partire dal blossom, si possono ricavare i punti del poliedro di controllo nel modo seguente:

$$\mathbf{b}_{ijk} = \mathbf{b}[\mathbf{e}_1^{<i>}, \mathbf{e}_2^{<j>}, \mathbf{e}_3^{<k>}], \quad i + j + k = n. \quad (3.5)$$

Infatti:

$$\mathbf{b}[\mathbf{e}_1^{<r>}, \mathbf{e}_2^{<s>}, \mathbf{e}_3^{<t>}] = \sum_{i+j+k=n} f_{ijk}(\underbrace{\mathbf{e}_1^{<r>}, \mathbf{e}_2^{<s>}, \mathbf{e}_3^{<t>}}_{=1 \Leftrightarrow r=i, s=j, t=k}) \mathbf{b}_{ijk} = \mathbf{b}_{rst}.$$

Analogamente, i punti intermedi dell'algoritmo di de Casteljau possono essere interpretati come valori blossom:

$$\mathbf{b}_{ijk}^r(\mathbf{u}) = \mathbf{b}[\mathbf{u}^{<r>}, \mathbf{e}_1^{<i>}, \mathbf{e}_2^{<j>}, \mathbf{e}_3^{<k>}], \quad r + i + j + k = n. \quad (3.6)$$

Infatti, da (3.1) si ha che  $\mathbf{b}_{ijk}^r(\mathbf{u})$  è ricavato a partire dai  $\mathbf{b}_{ijk}$  dopo aver applicato  $r$  passi dell'algoritmo di de Casteljau. Da (3.5) abbiamo un'espressione blossom dei punti di controllo; quindi concludiamo che il blossom che esprime le funzioni intermedie dell'algoritmo è (3.6).

### 3.4 Formula di Leibniz nel caso triangolare

Si può generalizzare la formula di Leibniz in (1.2) al caso triangolare in modo ovvio:

$$\mathbf{b}[(\alpha \mathbf{r} + \beta \mathbf{s})^{<n>}] = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \alpha^i \beta^{n-i} \mathbf{b}[\mathbf{r}^{<i>}, \mathbf{s}^{<n-i>}]. \quad (3.7)$$

Qui  $\alpha \mathbf{r} + \beta \mathbf{s}$  indica una coordinata baricentrica, perciò non è più un numero ma è un vettore con tre componenti che definisce la posizione del punto rispetto ai vertici di ciascun dominio triangolare. Gli argomenti del blossom sono di conseguenza dei vettori, e non più dei numeri.

La dimostrazione della formula di Leibniz in questo caso è del tutto analoga a quella già affrontata nel Capitolo 1, perciò non la ripeteremo.

*Esempio 7.* Siano  $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\alpha = 3$  e  $\beta = -1$ ,  $n = 2$ . Allora

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \left[ \left( 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{\langle 2 \rangle} \right] &= \sum_{i=0}^2 \binom{2}{i} 3^i (-1)^{2-i} \mathbf{b} \left[ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}^{\langle i \rangle}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^{\langle 2-i \rangle} \right] \\ &= \mathbf{b} \left[ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}^{\langle 0 \rangle}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^{\langle 2 \rangle} \right] - 2 \cdot 3 \left[ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}^{\langle 1 \rangle}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^{\langle 1 \rangle} \right] \\ &\quad + 3^2 \left[ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}^{\langle 2 \rangle}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^{\langle 0 \rangle} \right]. \end{aligned}$$



**Osservazione 1.** *Supponiamo di avere due punti  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{s}$  nel dominio di un patch triangolare. La linea retta passante per essi viene mappata in una curva di grado  $2n$  di  $\mathbb{E}^3$  appartenente al supporto del patch triangolare. Questa curva può essere descritta come una curva di Bézier e i suoi punti di controllo sono dati da  $\mathbf{b}[\mathbf{r}^{\langle n \rangle}]$ ,  $\mathbf{b}[\mathbf{r}^{\langle n-1 \rangle}, \mathbf{s}]$ ,  $\dots$ ,  $\mathbf{b}[\mathbf{s}^{\langle n \rangle}]$ . Ciò segue da quanto già illustrato nella sezione 2.3: il discorso su un patch triangolare è del tutto analogo e perciò non lo ripeteremo.*

**Osservazione 2.** *Se consideriamo tre punti  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{s}$  e  $\mathbf{t}$  nel dominio di un patch triangolare, otteniamo la seguente versione della formula di Leibniz:*

$$\mathbf{b}[(\alpha \mathbf{r} + \beta \mathbf{s} + \gamma \mathbf{t})^{\langle n \rangle}] = \sum_{|\mathbf{i}|=n} \binom{n}{\mathbf{i}} \alpha^i \beta^j \gamma^k \mathbf{b}[\mathbf{r}^{\langle i \rangle}, \mathbf{s}^{\langle j \rangle}, \mathbf{t}^{\langle k \rangle}], \quad \text{con } \alpha + \beta + \gamma = 1. \quad (3.8)$$

dove  $\binom{n}{\mathbf{i}} = \frac{n!}{i!j!k!}$  e la somma per  $|\mathbf{i}| = n$  è intesa come somma su tutte le triplette di interi  $(i, j, k)$  con  $i, j, k \geq 0$  e tali che  $|\mathbf{i}| = i + j + k = n$ .

*Dimostrazione.* La dimostrazione è analoga a quella della formula di Leibniz già presentata. Si procede per induzione su  $n \geq 1$ .

Se  $n = 1$  la tesi segue dalla proprietà di multiaffinità. Supponiamo che la formula valga per un  $n$  generico e dimostriamolo per  $n + 1$ .

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}[(\alpha\mathbf{r} + \beta\mathbf{s} + \gamma\mathbf{t})^{\langle n+1 \rangle}] &= \mathbf{b}[(\alpha\mathbf{r} + \beta\mathbf{s} + \gamma\mathbf{t})^{\langle n \rangle}, \alpha\mathbf{r} + \beta\mathbf{s} + \gamma\mathbf{t}] \\
&= \alpha\mathbf{b}[(\alpha\mathbf{r} + \beta\mathbf{s} + \gamma\mathbf{t})^{\langle n \rangle}, \mathbf{r}] \\
&\quad + \beta\mathbf{b}[(\alpha\mathbf{r} + \beta\mathbf{s} + \gamma\mathbf{t})^{\langle n \rangle}, \mathbf{s}] \\
&\quad + \gamma\mathbf{b}[(\alpha\mathbf{r} + \beta\mathbf{s} + \gamma\mathbf{t})^{\langle n \rangle}, \mathbf{t}] \\
&= \sum_{i+j+k=n} \binom{n}{\mathbf{i}} \alpha^i \beta^j \gamma^k \mathbf{b}[\mathbf{r}^{\langle i \rangle}, \mathbf{s}^{\langle j \rangle}, \mathbf{t}^{\langle k \rangle}, \mathbf{r}] + \\
&\quad + \sum_{i+j+k=n} \binom{n}{\mathbf{i}} \alpha^i \beta^j \beta \gamma^k \mathbf{b}[\mathbf{r}^{\langle i \rangle}, \mathbf{s}^{\langle j \rangle}, \mathbf{t}^{\langle k \rangle}, \mathbf{s}] \\
&\quad + \sum_{i+j+k=n} \binom{n}{\mathbf{i}} \alpha^i \beta^j \gamma^k \gamma \mathbf{b}[\mathbf{r}^{\langle i \rangle}, \mathbf{s}^{\langle j \rangle}, \mathbf{t}^{\langle k \rangle}, \mathbf{t}] \\
&= \sum_{i+j+k=n} \left( \frac{n!}{i!j!k!} \right) \left( \frac{i+1}{i+1} \right) \alpha^{i+1} \beta^j \gamma^k \mathbf{b}[\mathbf{r}^{\langle i+1 \rangle}, \mathbf{s}^{\langle j \rangle}, \mathbf{t}^{\langle k \rangle}] \\
&\quad + \sum_{i+j+k=n} \left( \frac{n!}{i!j!k!} \right) \left( \frac{j+1}{j+1} \right) \alpha^i \beta^{j+1} \gamma^k \mathbf{b}[\mathbf{r}^{\langle i \rangle}, \mathbf{s}^{\langle j+1 \rangle}, \mathbf{t}^{\langle k \rangle}] \\
&\quad + \sum_{i+j+k=n} \left( \frac{n!}{i!j!k!} \right) \left( \frac{k+1}{k+1} \right) \alpha^i \beta^j \gamma^{k+1} \mathbf{b}[\mathbf{r}^{\langle i \rangle}, \mathbf{s}^{\langle j \rangle}, \mathbf{t}^{\langle k+1 \rangle}].
\end{aligned}$$

Trasformando  $i \rightarrow i - 1$  nella prima sommatoria,  $j \rightarrow j - 1$  nella seconda e  $k \rightarrow k - 1$  nella terza si ottiene:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i+j+k=n+1} i \left( \frac{n!}{i!j!k!} \right) \alpha^i \beta^j \gamma^k \mathbf{b}[\mathbf{r}^{\langle i \rangle}, \mathbf{s}^{\langle j \rangle}, \mathbf{t}^{\langle k \rangle}] \\
&\quad + \sum_{i+j+k=n+1} j \left( \frac{n!}{i!j!k!} \right) \alpha^i \beta^j \gamma^k \mathbf{b}[\mathbf{r}^{\langle i \rangle}, \mathbf{s}^{\langle j \rangle}, \mathbf{t}^{\langle k \rangle}] \\
&\quad + \sum_{i+j+k=n+1} k \left( \frac{n!}{i!j!k!} \right) \alpha^i \beta^j \gamma^k \mathbf{b}[\mathbf{r}^{\langle i \rangle}, \mathbf{s}^{\langle j \rangle}, \mathbf{t}^{\langle k \rangle}].
\end{aligned}$$

Poichè  $i + j + k = n + 1$  in ciascuna sommatoria, le tre sommatorie si possono unire a formare la seguente

$$\sum_{i+j+k=n+1} \left( \frac{(n+1)!}{i!j!k!} \right) \alpha^i \beta^j \gamma^k \mathbf{b}[\mathbf{r}^{\langle i \rangle}, \mathbf{s}^{\langle j \rangle}, \mathbf{t}^{\langle k \rangle}]$$

che è ciò che volevamo dimostrare.  $\square$

### 3.5 I polinomi di Bernstein nel caso triangolare

**Definizione 9.** Nel caso di patch triangolari, i polinomi di Bernstein sono definiti come

$$B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) = B_{ijk}^n(\mathbf{u}) = \binom{n}{\mathbf{i}} u^i v^j w^k = \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k, \quad (3.9)$$

con  $|\mathbf{i}| = n$ . Se  $i, j, k < 0$  o  $i, j, k > n$  porremo  $B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) = 0$ .

Se  $n = 4$ , per esempio, i polinomi di Bernstein relativi a  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$  sono:

$$\begin{array}{cccccc} & & & & & v^4 \\ & & & & & 4v^3w & 4uv^3 \\ & & & & & 6v^2w^2 & 12uv^2w & 6u^2v^2 \\ & & & & & 4vw^3 & 12uvw^2 & 12u^2vw & 4u^3v \\ & & & & & w^4 & 4uw^3 & 6u^2w^2 & 4u^3w & u^4 \end{array}$$

**Proposizione 4.** Osserviamo che

$$\begin{aligned} B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) &= uB_{\mathbf{i}-\mathbf{e}_1}^{n-1}(\mathbf{u}) + vB_{\mathbf{i}-\mathbf{e}_2}^{n-1}(\mathbf{u}) + wB_{\mathbf{i}-\mathbf{e}_3}^{n-1}(\mathbf{u}) \\ &= uB_{i-1,j,k}^{n-1}(\mathbf{u}) + vB_{i,j-1,k}^{n-1}(\mathbf{u}) + wB_{i,j,k-1}^{n-1}(\mathbf{u}), \quad \text{con } i+j+k=n, \end{aligned} \quad (3.10)$$

poichè

$$\binom{n}{\mathbf{i}} = \binom{n-1}{\mathbf{i}-\mathbf{e}_1} + \binom{n-1}{\mathbf{i}-\mathbf{e}_2} + \binom{n-1}{\mathbf{i}-\mathbf{e}_3}. \quad (3.11)$$

*Dimostrazione.* Vale la seguente catena di uguaglianze:

$$\begin{aligned} &uB_{\mathbf{i}-\mathbf{e}_1}^{n-1}(\mathbf{u}) + vB_{\mathbf{i}-\mathbf{e}_2}^{n-1}(\mathbf{u}) + wB_{\mathbf{i}-\mathbf{e}_3}^{n-1}(\mathbf{u}) \\ &= u \binom{n-1}{\mathbf{i}+\mathbf{e}_1} u^{i-1} v^j w^k + v \binom{n-1}{\mathbf{i}+\mathbf{e}_2} u^i v^{j-1} w^k + w \binom{n-1}{\mathbf{i}+\mathbf{e}_3} u^i v^j w^{k-1} \\ &= \frac{(n-1)!}{(i-1)!j!k!} u^i v^j w^k + \frac{(n-1)!}{i!(j-1)!k!} u^i v^j w^k + \frac{(n-1)!}{i!j!(k-1)!} u^i v^j w^k \\ &= \left( \frac{(i+j+k)(n-1)!}{i!j!k!} \right) u^i v^j w^k \\ &\stackrel{(i+j+k=n)}{=} \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k. \quad \square \end{aligned}$$



Vale inoltre la seguente

**Proposizione 5.** I polinomi di Bernstein possono essere utilizzati per definire i patch triangolari di Bézier. Si ha infatti

$$\mathbf{b}(\mathbf{u}) = \sum_{i+j+k=n} B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) \mathbf{b}_{ijk}. \quad (3.12)$$

*Dimostrazione.* Sapendo che  $\mathbf{u} = u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 + w\mathbf{e}_3$ , si ha la seguente catena di uguaglianze, che fa uso di (3.5) e di (3.8), che dimostra quanto sopra enunciato:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(\mathbf{u}) &= \mathbf{b}[\mathbf{u}^{\langle n \rangle}] = \mathbf{b}[(u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 + w\mathbf{e}_3)^{\langle n \rangle}] \\ &= \sum_{|\mathbf{i}|=n} \binom{n}{\mathbf{i}} u^i v^j w^k \mathbf{b}[\mathbf{e}_1^{\langle i \rangle}, \mathbf{e}_2^{\langle j \rangle}, \mathbf{e}_3^{\langle k \rangle}] \\ &= \sum_{|\mathbf{i}|=n} \underbrace{\binom{n}{\mathbf{i}} u^i v^j w^k}_{B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u})} \mathbf{b}_{ijk} \\ &= \sum_{|\mathbf{i}|=n} B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) \mathbf{b}_{ijk} \end{aligned}$$

□

Tramite il formalismo blossom, la dimostrazione precedente risulta molto più semplice di quanto sarebbe stata utilizzando la notazione classica. Per mostrare questo fatto, riportiamo anche quest'ultima.

*Dimostrazione.* (alternativa) Per definizione, la funzione che descrive un triangolo di Bézier è

$$\mathbf{b}(\mathbf{u}) = \sum_{i+j+k=n} f_{ijk}(\underbrace{\mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}}_{n \text{ volte}}) \mathbf{b}_{ijk}.$$

Vogliamo perciò dimostrare che vale la seguente uguaglianza:

$$f_{ijk}(\mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}) = B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}).$$

Abbiamo

$$f_{ijk}(\mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}) = \sum (u_{t_1} \cdot \dots \cdot u_{t_n}),$$

cioè  $f_{ijk}(\mathbf{u}, \dots, \mathbf{u})$  è la somma di tutte le permutazioni possibili di  $i$  volte  $u$ ,  $j$  volte  $v$  e  $k$  volte  $w$ , con  $i + j + k = n$ . Notiamo quindi che il numero di tali permutazioni è  $\frac{n!}{i!j!k!}$ , grazie alle nozioni di Calcolo Combinatorio. Abbiamo così ottenuto che

$$f_{ijk}(\mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}) = \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k = B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}),$$

cioè la nostra tesi. □

È quindi evidente che il formalismo blossom permette di semplificare molto le dimostrazioni di questo tipo. Analogamente, presentiamo un'altra Proposizione, la cui dimostrazione fa uso della tecnica blossom.

**Proposizione 6.** Si può ricavare l'espressione delle funzioni intermedie al passo  $r$  dell'algoritmo di de Casteljau tramite i polinomi di Bernstein come

$$\mathbf{b}_{\mathbf{i}}^r(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{j}|=r} \mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{j}} B_{\mathbf{j}}^r(\mathbf{u}), \quad |\mathbf{i}| = n - r \quad (3.13)$$

*Dimostrazione.* Poniamo  $\mathbf{i} = (i, j, k)$ ,  $\mathbf{j} = (x, y, z)$  e  $\mathbf{u} = u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 + w\mathbf{e}_3$ . Per la (3.6) si ha che

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{\mathbf{i}}^r(\mathbf{u}) &= \mathbf{b}_{ijk}^r(\mathbf{u}) = \mathbf{b}[\mathbf{u}^{\langle r \rangle}, \mathbf{e}_1^{\langle i \rangle}, \mathbf{e}_2^{\langle j \rangle}, \mathbf{e}_3^{\langle k \rangle}] \\ &= \mathbf{b}[(u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 + w\mathbf{e}_3)^{\langle r \rangle}, \mathbf{e}_1^{\langle i \rangle}, \mathbf{e}_2^{\langle j \rangle}, \mathbf{e}_3^{\langle k \rangle}] \end{aligned}$$

e per la (3.8)

$$\begin{aligned} &= \sum_{|\mathbf{j}|=r} \binom{r}{\mathbf{j}} u^x v^y w^z \mathbf{b}[\mathbf{e}_1^{\langle i+x \rangle}, \mathbf{e}_2^{\langle j+y \rangle}, \mathbf{e}_3^{\langle k+z \rangle}] \\ &= \sum_{|\mathbf{j}|=r} \binom{r}{\mathbf{j}} u^x v^y w^z \underbrace{\mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{j}}}_{B_{\mathbf{j}}^r(\mathbf{u})} \\ &= \sum_{|\mathbf{j}|=r} \mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{j}} B_{\mathbf{j}}^r(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

□

Anche in questo caso si può dare una dimostrazione alternativa che fa uso della tecnica standard anzichè il formalismo blossom.

*Dimostrazione.* (alternativa) Per dimostrare l'uguaglianza dovremmo far vedere che, se  $\mathbf{u} = (u, v, w)$ , vale

$$\sum_{|\mathbf{j}|=r} \mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{j}} B_{\mathbf{j}}^r(\mathbf{u}) = u \mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_1}^{r-1} + v \mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_2}^{r-1} + w \mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_3}^{r-1}, \quad \forall r \in 1, \dots, n \text{ e } |\mathbf{i}| = n - r.$$

Dovremmo cioè dimostrare che la forma chiusa a primo membro è uguale alla formula ricorsiva a secondo membro. Per fare ciò dimostriamo l'uguaglianza nei casi  $r = 2$  e  $r = 3$  per passare alla generalizzazione dell'uguaglianza per  $r$  qualsiasi.

Iniziamo con  $r = 2$ . Abbiamo che la funzione intermedia si esprime nel modo seguente:

$$\mathbf{b}_{\mathbf{i}}^2(\mathbf{u}) = u \mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_1}^1(\mathbf{u}) + v \mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_2}^1(\mathbf{u}) + w \mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_3}^1(\mathbf{u}),$$

dove

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_1}^1(\mathbf{u}) &= u \mathbf{b}_{\mathbf{i}+2\mathbf{e}_1} + v \mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2} + w \mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3}, \\ \mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_2}^1(\mathbf{u}) &= u \mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2} + v \mathbf{b}_{\mathbf{i}+2\mathbf{e}_2} + w \mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3}, \\ \mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_3}^1(\mathbf{u}) &= u \mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3} + v \mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3} + w \mathbf{b}_{\mathbf{i}+2\mathbf{e}_3}. \end{aligned}$$

Si ha perciò che

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{\mathbf{i}}^2(\mathbf{u}) &= u^2 \mathbf{b}_{\mathbf{i}+2\mathbf{e}_1} + v^2 \mathbf{b}_{\mathbf{i}+2\mathbf{e}_2} + w^2 \mathbf{b}_{\mathbf{i}+2\mathbf{e}_3} \\ &\quad + 2uv \mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2} + 2uw \mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3} + 2vw \mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3} \\ &= \binom{2}{2\mathbf{e}_1} u^2 \mathbf{b}_{\mathbf{i}+2\mathbf{e}_1} + \binom{2}{2\mathbf{e}_2} v^2 \mathbf{b}_{\mathbf{i}+2\mathbf{e}_2} + \binom{2}{2\mathbf{e}_3} w^2 \mathbf{b}_{\mathbf{i}+2\mathbf{e}_3} \\ &\quad + \binom{2}{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2} uv \mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2} + \binom{2}{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3} uw \mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3} \\ &\quad + \binom{2}{\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3} vw \mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= B_{2\mathbf{e}_1}^2(\mathbf{u})\mathbf{b}_{\mathbf{i}+2\mathbf{e}_1} + B_{2\mathbf{e}_2}^2\mathbf{b}_{\mathbf{i}+2\mathbf{e}_2} + B_{2\mathbf{e}_3}^2\mathbf{b}_{\mathbf{i}+2\mathbf{e}_3} \\
&+ B_{\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2}^2\mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2} + B_{\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3}^2\mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3} \\
&+ B_{\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3}^2\mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3},
\end{aligned}$$

cioè la tesi.

Vediamo ora il caso  $n = 3$ . Si ha che

$$\mathbf{b}_{\mathbf{i}}^3(\mathbf{u}) = u\mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_1}^2(\mathbf{u}) + v\mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_2}^2(\mathbf{u}) + w\mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_3}^2(\mathbf{u}),$$

dove

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_1}^2(\mathbf{u}) &= u\mathbf{b}_{\mathbf{i}+2\mathbf{e}_1}^1 + v\mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2}^1 + w\mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3}^1, \\
\mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_2}^2(\mathbf{u}) &= u\mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2}^1 + v\mathbf{b}_{\mathbf{i}+2\mathbf{e}_2}^1 + w\mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3}^1, \\
\mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_3}^2(\mathbf{u}) &= u\mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3}^1 + v\mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3}^1 + w\mathbf{b}_{\mathbf{i}+2\mathbf{e}_3}^1,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_{\mathbf{i}+2\mathbf{e}_1}^1(\mathbf{u}) &= u\mathbf{b}_{\mathbf{i}+3\mathbf{e}_1} + v\mathbf{b}_{\mathbf{i}+2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2} + w\mathbf{b}_{\mathbf{i}+2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3}, \\
\mathbf{b}_{\mathbf{i}+2\mathbf{e}_2}^1(\mathbf{u}) &= u\mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2} + v\mathbf{b}_{\mathbf{i}+3\mathbf{e}_2} + w\mathbf{b}_{\mathbf{i}+2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3}, \\
\mathbf{b}_{\mathbf{i}+2\mathbf{e}_3}^1(\mathbf{u}) &= u\mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_3} + v\mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_2+2\mathbf{e}_3} + w\mathbf{b}_{\mathbf{i}+3\mathbf{e}_3}, \\
\mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2}^1(\mathbf{u}) &= u\mathbf{b}_{\mathbf{i}+2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2} + v\mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2} + w\mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3}, \\
\mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3}^1(\mathbf{u}) &= u\mathbf{b}_{\mathbf{i}+2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3} + v\mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3} + w\mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_3}, \\
\mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3}^1(\mathbf{u}) &= u\mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3} + v\mathbf{b}_{\mathbf{i}+2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3} + w\mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_2+2\mathbf{e}_3}.
\end{aligned}$$

Dunque otteniamo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_{\mathbf{i}}^3(\mathbf{u}) &= u^3\mathbf{b}_{\mathbf{i}+3\mathbf{e}_1} + v^3\mathbf{b}_{\mathbf{i}+3\mathbf{e}_2} + w^3\mathbf{b}_{\mathbf{i}+3\mathbf{e}_3} \\
&+ 3u^2v\mathbf{b}_{\mathbf{i}+2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2} + 3u^2w\mathbf{b}_{\mathbf{i}+2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3} + 3uv^2\mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2} \\
&+ 3uw^2\mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_3} + 3v^2w\mathbf{b}_{\mathbf{i}+2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3} + 3vw^2\mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_2+2\mathbf{e}_3} \\
&+ 6uvw\mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \binom{3}{3\mathbf{e}_1} u^3 \mathbf{b}_{\mathbf{i}+3\mathbf{e}_1} + \binom{3}{3\mathbf{e}_2} v^3 \mathbf{b}_{\mathbf{i}+3\mathbf{e}_2} + \binom{3}{3\mathbf{e}_3} w^3 \mathbf{b}_{\mathbf{i}+3\mathbf{e}_3} \\
&+ \binom{3}{2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2} u^2 v \mathbf{b}_{\mathbf{i}+2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2} + \binom{3}{2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3} u^2 w \mathbf{b}_{\mathbf{i}+2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3} \\
&+ \binom{3}{\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2} u v^2 \mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2} + \binom{3}{\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3} u w^2 \mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_3} \\
&+ \binom{3}{2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3} v^2 w \mathbf{b}_{\mathbf{i}+2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3} + \binom{3}{\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3} v w^2 \mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_2+2\mathbf{e}_3} \\
&+ \binom{3}{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3} u v w \mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3} \\
&= B_{3\mathbf{e}_1}^3(\mathbf{u}) \mathbf{b}_{\mathbf{i}+3\mathbf{e}_1} + B_{3\mathbf{e}_2}^3 \mathbf{b}_{\mathbf{i}+3\mathbf{e}_2} + B_{3\mathbf{e}_3}^3 \mathbf{b}_{\mathbf{i}+3\mathbf{e}_3} \\
&+ B_{2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2}^3 \mathbf{b}_{\mathbf{i}+2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2} + B_{2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3}^3 \mathbf{b}_{\mathbf{i}+2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3} + B_{\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2}^3 \mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2} \\
&+ B_{\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_3}^3 \mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_3} + B_{2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3}^3 \mathbf{b}_{\mathbf{i}+2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3} + B_{\mathbf{e}_2+2\mathbf{e}_3}^3 \mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_2+2\mathbf{e}_3} \\
&+ B_{\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3}^3 \mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3},
\end{aligned}$$

e anche in questo caso abbiamo verificato che la Proposizione è vera.

Con passaggi analoghi si verifica che la ricorsione adottata per un  $r$  qualsiasi è uguale alla forma chiusa che abbiamo indicato nella Proposizione.  $\square$

Dalle Proposizioni 5 e 6, in modo analogo a quanto fatto per le curve in (1.15), si arriva alla seguente formulazione dell'espressione di  $\mathbf{b}^n(\mathbf{u})$ :

$$\mathbf{b}^n(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{j}|=n-r} \mathbf{b}_{\mathbf{j}}^r(\mathbf{u}) B_{\mathbf{j}}^{n-r}(\mathbf{u}), \quad 0 \leq r \leq n. \quad (3.14)$$

In questo caso, anzichè considerare i punti di controllo  $\mathbf{b}_{ijk}$  si utilizzano le funzioni intermedie dell'algoritmo al passo  $r$ ; di conseguenza, avremo dei differenti polinomi di Bernstein in relazione al passo cui si fa riferimento.

### 3.6 Derivate direzionali per triangoli di Bézier

Per calcolare le derivate in punti di patch tensoriali, la scelta più ovvia è utilizzare le derivate parziali, poichè si può facilmente derivare nelle direzioni dei loro spigoli. Per quanto riguarda i patch triangolari, questa via non è di certo la più efficace; si ricorre perciò alle derivate direzionali.

Siano  $\mathbf{u}_1$  e  $\mathbf{u}_2$  due punti nel dominio di un patch triangolare. La loro differenza è  $\mathbf{d} = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1$  e costituisce un vettore. La *derivata direzionale* della funzione  $\mathbf{b}(\mathbf{u})$  rispetto a  $\mathbf{d}$  vale

$$D_{\mathbf{d}}\mathbf{b}(\mathbf{u}) = \lim_{\mathbf{d} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{1}{|\mathbf{d}|} [\mathbf{b}(\mathbf{u} + \mathbf{d}) - \mathbf{b}(\mathbf{u})]. \quad (3.15)$$

Tale definizione ha un significato geometrico ben preciso: nel dominio si traccia la retta passante per  $\mathbf{u}$  avente la direzione di  $\mathbf{d}$  e la si mappa in una curva sul patch. Il vettore tangente a  $\mathbf{b}(\mathbf{u})$  nella direzione tangente alla curva così ottenuta è la derivata direzionale ricercata.

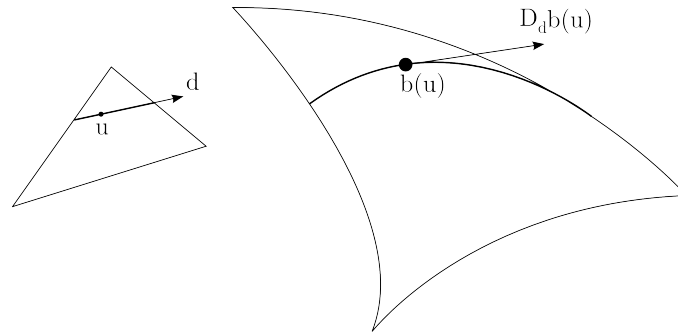


Figura 3.3: *Derivata Direzionale: un segmento nel dominio viene mappato in una curva sul patch triangolare.*

Come è stato fatto in precedenza nel caso delle curve, procediamo ora a ricavare una formulazione più comoda per il calcolo della derivata direzionale. Osserviamo che

$$\mathbf{b}[(\mathbf{u} + \mathbf{d})^{<n>}] = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \mathbf{b}[\mathbf{u}^{<n-i>}, \mathbf{d}^{<i>}]. \quad (3.16)$$

Perciò:

$$\begin{aligned}
D_{\mathbf{d}}\mathbf{b}(\mathbf{u}) &= \lim_{\mathbf{d} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{1}{|\mathbf{d}|} [\mathbf{b}[(\mathbf{u} + \mathbf{d})^{<n>}] - \mathbf{b}[\mathbf{u}^{<n>}]] \\
&= \lim_{\mathbf{d} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{1}{|\mathbf{d}|} \left[ \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \mathbf{b}[\mathbf{u}^{<n-i>}, \mathbf{d}^{<i>}] - \mathbf{b}[\mathbf{u}^{<n>}] \right] \\
&= \lim_{\mathbf{d} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{1}{|\mathbf{d}|} \left[ \cancel{\mathbf{b}[\mathbf{u}^{<n>}]} + n\mathbf{b}[\mathbf{u}^{<n-1>}, \mathbf{d}] \right. \\
&\quad \left. + \binom{n}{2} \mathbf{b}[\mathbf{u}^{<n-2>}, \mathbf{d}, \mathbf{d}] + \dots + \mathbf{b}[\mathbf{d}^{<n>}] - \cancel{\mathbf{b}[\mathbf{u}^{<n>}]} \right] \\
&= n\mathbf{b}[\mathbf{u}^{<n-1>}, \mathbf{d}].
\end{aligned}$$

Come nel caso delle curve, possiamo dare due interpretazioni alla formula appena trovata:

- Possiamo effettuare un passo dell'algoritmo di de Casteljau rispetto alla direzione del vettore  $\mathbf{d} = (d, e, f)$  e  $n - 1$  passi rispetto alla posizione  $\mathbf{u}$ . Effettuare un passo dell'algoritmo di de Casteljau rispetto alla direzione  $\mathbf{d}$  significa calcolare  $\mathbf{b}_{\mathbf{i}}^1(\mathbf{d})$  nel modo seguente:

$$\mathbf{b}_{\mathbf{i}}^1(\mathbf{d}) = d\mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_1} + e\mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_2} + f\mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_3},$$

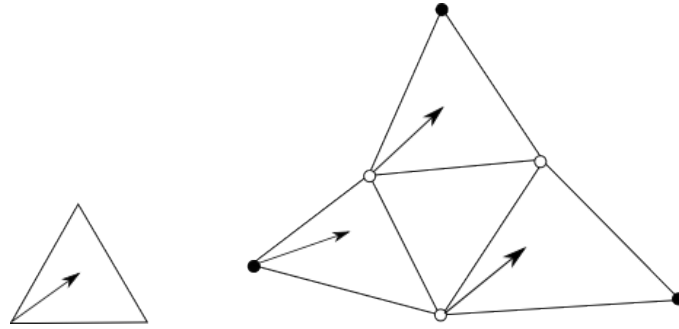
con  $|\mathbf{i}| = n - 1$ . Semplicemente utilizzando la (3.12), si ottiene l'espressione desiderata:

$$D_{\mathbf{d}}\mathbf{b}(\mathbf{u}) = n \sum_{|\mathbf{i}|=n-1} \mathbf{b}_{\mathbf{i}}^1(\mathbf{d}) B_{\mathbf{i}}^{n-1}(\mathbf{u}). \quad (3.17)$$

In pratica, quello che succede è che il vettore  $\mathbf{d}$  nel dominio triangolare viene mappato all'interno di ciascun sottotriangolo della rete di controllo come presentato in Figura 3.4.

- Si possono effettuare prima  $n - 1$  passi dell'algoritmo di de Casteljau rispetto a  $\mathbf{u}$  e poi un passo rispetto a  $\mathbf{d}$ :

$$D_{\mathbf{d}}\mathbf{b}(\mathbf{u}) = n(d\mathbf{b}_{\mathbf{e}_1}^{n-1}(\mathbf{u}) + e\mathbf{b}_{\mathbf{e}_2}^{n-1}(\mathbf{u}) + f\mathbf{b}_{\mathbf{e}_3}^{n-1}(\mathbf{u})) \quad (3.18)$$

Figura 3.4: *Derivata Direzionale*

dove  $\mathbf{d} = (d, e, f)$  e  $d + e + f = 1$ . L'uguaglianza delle due formulazioni si dimostra utilizzando la (3.1) e la (3.12):

$$\begin{aligned}
 D_{\mathbf{d}}\mathbf{b}(\mathbf{u}) &= n\mathbf{b}[\mathbf{u}^{\langle n-1 \rangle}, \mathbf{d}] \\
 &= n\mathbf{b}[\mathbf{u}^{\langle n-1 \rangle}, d\mathbf{e}_1 + e\mathbf{e}_2 + f\mathbf{e}_3] \\
 &\stackrel{(\text{multiaffinit\`a})}{=} n(d\mathbf{b}[\mathbf{u}^{\langle n-1 \rangle}, \mathbf{e}_1] + e\mathbf{b}[\mathbf{u}^{\langle n-1 \rangle}, \mathbf{e}_2] + f\mathbf{b}[\mathbf{u}^{\langle n-1 \rangle}, \mathbf{e}_3]) \\
 &\stackrel{(3.6)}{=} n(d\mathbf{b}_{\mathbf{e}_1}^{n-1}(\mathbf{u}) + e\mathbf{b}_{\mathbf{e}_2}^{n-1}(\mathbf{u}) + f\mathbf{b}_{\mathbf{e}_3}^{n-1}(\mathbf{u})).
 \end{aligned}$$

**Osservazione 3.** Poichè le derivate direzionali si possono ovviamente determinare per ogni direzione  $\mathbf{d} \in \mathbb{E}^2$ , la seconda formulazione per  $D_{\mathbf{d}}\mathbf{b}(\mathbf{u})$  mostra che, in generale,  $\mathbf{b}_{\mathbf{e}_1}^{n-1}(\mathbf{u})$ ,  $\mathbf{b}_{\mathbf{e}_2}^{n-1}(\mathbf{u})$  e  $\mathbf{b}_{\mathbf{e}_3}^{n-1}(\mathbf{u})$  definiscono un piano tangente a  $\mathbf{b}^n(\mathbf{u})$ .

*Esempio 8.* Trattiamo ora un esempio concreto per il calcolo della derivata direzionale in un punto di un foglio triangolare di Bézier; verificheremo che i due metodi sopra citati sono equivalenti.

Siano  $n = 3$ ,  $\mathbf{u} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  e  $\mathbf{d} = (1, 0, -1)$ . Il poliedro di controllo sia



definito dai seguenti punti:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & \mathbf{b}_{030} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 & & & & & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & & & \mathbf{b}_{021} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_{120} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \\
 & & & & & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & & & \mathbf{b}_{012} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_{111} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_{210} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \\
 & & & & & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & & & \mathbf{b}_{003} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_{102} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_{201} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_{300} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

1. Ricaviamo la derivata nel primo modo, cioè come

$D_{\mathbf{d}}\mathbf{b}(\mathbf{u}) = 3 \sum_{|i|=2} \mathbf{b}_i^1(\mathbf{d}) B_i^2(\mathbf{u})$ . Calcoliamo innanzitutto le funzioni intermedie  $\mathbf{b}_i^1(\mathbf{d})$ :

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{b}_{002}^1(\mathbf{d}) = \mathbf{b}_{102} - \mathbf{b}_{003} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{b}_{101}^1(\mathbf{d}) = \mathbf{b}_{201} - \mathbf{b}_{102} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{b}_{200}^1(\mathbf{d}) = \mathbf{b}_{300} - \mathbf{b}_{201} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{b}_{011}^1(\mathbf{d}) = \mathbf{b}_{111} - \mathbf{b}_{012} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{b}_{110}^1(\mathbf{d}) = \mathbf{b}_{210} - \mathbf{b}_{111} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{b}_{020}^1(\mathbf{d}) = \mathbf{b}_{120} - \mathbf{b}_{021} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Si ha così che

$$D_{\mathbf{d}}\mathbf{b}(\mathbf{u}) = 3 \left[ \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} B_{002}^2(\mathbf{u}) + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix} B_{101}^2(\mathbf{u}) + \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix} B_{200}^2(\mathbf{u}) \\ + \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} B_{011}^2(\mathbf{u}) + \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} B_{110}^2(\mathbf{u}) + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} B_{020}^2(\mathbf{u}) \end{array} \right].$$

Calcoliamo ora i polinomi di Bernstein semplicemente applicando la definizione; otteniamo:

$$B_{002}^2(\mathbf{u}) = \frac{1}{9}, \quad B_{101}^2(\mathbf{u}) = \frac{2}{9}, \quad B_{200}^2(\mathbf{u}) = \frac{1}{9}, \\ B_{011}^2(\mathbf{u}) = \frac{2}{9}, \quad B_{110}^2(\mathbf{u}) = \frac{2}{9}, \quad B_{020}^2(\mathbf{u}) = \frac{1}{9}.$$

Andando a sostituire, ricaviamo il valore della derivata in  $\mathbf{b}(\mathbf{u})$  nella direzione  $\mathbf{d}$ :

$$D_{\mathbf{d}}\mathbf{b}(\mathbf{u}) = 3 \left[ \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{2}{9} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix} + \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix} + \frac{2}{9} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} + \frac{2}{9} \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \right] \\ = 3 \begin{bmatrix} 2/3 \\ 4/3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

2. Ora procediamo nel secondo modo, cioè come  $D_{\mathbf{d}}\mathbf{b}(\mathbf{u}) = 3(\mathbf{b}_{100}^2(\mathbf{u}) - \mathbf{b}_{001}^2(\mathbf{u}))$ . Abbiamo che

$$\mathbf{b}_{100}^2(\mathbf{u}) = \frac{1}{3}\mathbf{b}_{200}^1(\mathbf{u}) + \frac{1}{3}\mathbf{b}_{110}^1(\mathbf{u}) + \frac{1}{3}\mathbf{b}_{101}^1(\mathbf{u})$$

e

$$\mathbf{b}_{001}^2(\mathbf{u}) = \frac{1}{3}\mathbf{b}_{101}^1(\mathbf{u}) + \frac{1}{3}\mathbf{b}_{011}^1(\mathbf{u}) + \frac{1}{3}\mathbf{b}_{002}^1(\mathbf{u}),$$

dove

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_{200}^1(\mathbf{u}) &= \frac{1}{3}\mathbf{b}_{300} + \frac{1}{3}\mathbf{b}_{210} + \frac{1}{3}\mathbf{b}_{201} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{b}_{110}^1(\mathbf{u}) &= \frac{1}{3}\mathbf{b}_{210} + \frac{1}{3}\mathbf{b}_{120} + \frac{1}{3}\mathbf{b}_{111} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{b}_{101}^1(\mathbf{u}) &= \frac{1}{3}\mathbf{b}_{201} + \frac{1}{3}\mathbf{b}_{111} + \frac{1}{3}\mathbf{b}_{102} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{b}_{011}^1(\mathbf{u}) &= \frac{1}{3}\mathbf{b}_{111} + \frac{1}{3}\mathbf{b}_{021} + \frac{1}{3}\mathbf{b}_{012} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{b}_{002}^1(\mathbf{u}) &= \frac{1}{3}\mathbf{b}_{102} + \frac{1}{3}\mathbf{b}_{012} + \frac{1}{3}\mathbf{b}_{003} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Si ha perciò che

$$\mathbf{b}_{100}^2(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 14/3 \\ 7/3 \\ 11/3 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{b}_{001}^2(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5/3 \end{bmatrix},$$

e quindi

$$D_{\mathbf{d}}\mathbf{b}(\mathbf{u}) = 3\left(\begin{bmatrix} 14/3 \\ 7/3 \\ 11/3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5/3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix},$$

cioè il valore che avevamo ottenuto con il primo metodo.



Osserviamo quindi che le *derivate successive* di  $\mathbf{b}(\mathbf{u})$  saranno:

$$\begin{aligned}D_{\mathbf{d}}(D_{\mathbf{d}}\mathbf{b}(\mathbf{u})) &= D_{\mathbf{d}}^2\mathbf{b}(\mathbf{u}) = n(n-1)\mathbf{b}[\mathbf{u}^{<n-2>}, \mathbf{d}^{<2>}] \\ D_{\mathbf{d}}(D_{\mathbf{d}}^2\mathbf{b}(\mathbf{u})) &= D_{\mathbf{d}}^3\mathbf{b}(\mathbf{u}) = n(n-1)(n-2)\mathbf{b}[\mathbf{u}^{<n-3>}, \mathbf{d}^{<3>}] \\ &\vdots \\ D_{\mathbf{d}}(D_{\mathbf{d}}^{r-1}\mathbf{b}(\mathbf{u})) &= D_{\mathbf{d}}^r\mathbf{b}(\mathbf{u}) = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)\mathbf{b}[\mathbf{u}^{<n-r>}, \mathbf{d}^{<r>}].\end{aligned}$$

Concludiamo dunque che, in generale,

$$D_{\mathbf{d}}^r \mathbf{b}(\mathbf{u}) = \frac{n!}{(n-r)!} \mathbf{b}[\mathbf{u}^{\langle n-r \rangle}, \mathbf{d}^{\langle r \rangle}]. \quad (3.19)$$

Sviluppando questa uguaglianza si ottengono ancora due interpretazioni:

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{d}}^r \mathbf{b}(\mathbf{u}) &= \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{|\mathbf{j}|=r} \mathbf{b}_{\mathbf{j}}^{n-r}(\mathbf{u}) B_{\mathbf{j}}^r(\mathbf{d}) \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{|\mathbf{j}|=n-r} \mathbf{b}_{\mathbf{j}}^r(\mathbf{d}) B_{\mathbf{j}}^{n-r}(\mathbf{u}), \end{aligned} \quad (3.20)$$

dove  $\mathbf{d} = (d, e, f)$ .

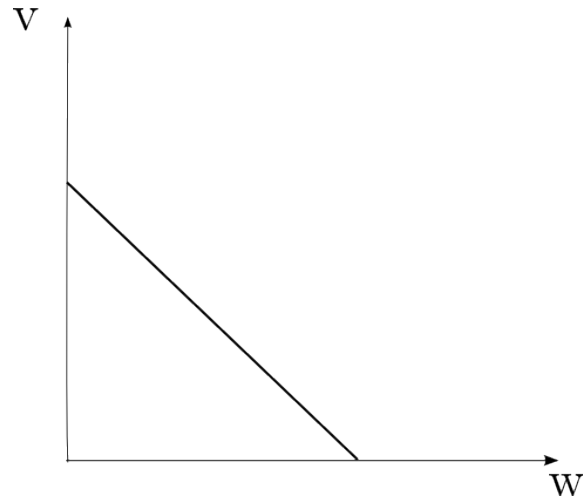
Allo stesso modo si può dare una formulazione delle *derivate direzionali miste*. Consideriamo a tal proposito due vettori nel dominio analoghi al  $\mathbf{d}$  di prima:  $\mathbf{d}_1$  e  $\mathbf{d}_2$ . Allora si ha, seguendo un ragionamento analogo al precedente,

$$D_{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2}^{r,s} \mathbf{b}(\mathbf{u}) = \frac{n!}{(n-r-s)!} \mathbf{b}[\mathbf{d}_1^{\langle r \rangle}, \mathbf{d}_2^{\langle s \rangle}, \mathbf{u}^{\langle n-r-s \rangle}] \quad (3.21)$$

Analizziamo infine le *derivate direzionali sulla frontiera* del dominio di definizione di un blossom  $\mathbf{b}$ . Consideriamo il vettore  $\mathbf{u} = (u, v, w)$ , dove  $u = 0$ ; esso rappresenta i punti di un lato del triangolo di definizione di  $\mathbf{b}$ : abbiamo infatti che  $\mathbf{u} = (0, v, 1-v)$ . Deriviamo lungo una direzione  $\mathbf{d}$  non parallela alla direzione del lato del triangolo su cui stiamo lavorando. Per avere una direzione non parallela è sufficiente considerare in (3.20)  $\mathbf{j} = \mathbf{i}_0 = (0, j, k)$ . Si ottiene così:

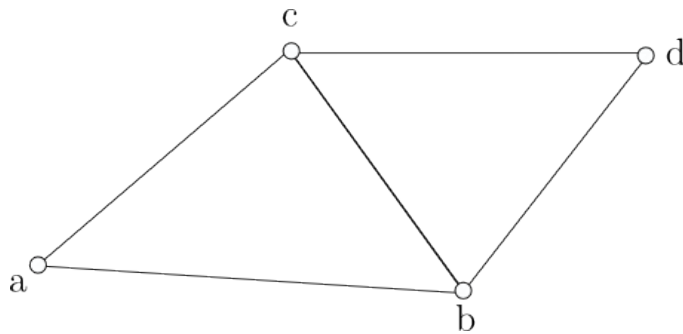
$$D_{\mathbf{d}}^r \mathbf{b}^n(\mathbf{u}) \Big|_{u=0} = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{|\mathbf{i}_0|=n-r} \mathbf{b}_{\mathbf{i}_0}^r(\mathbf{d}) B_{\mathbf{i}_0}^{n-r}(\mathbf{u}) \Big|_{u=0}. \quad (3.22)$$

Si procede in modo analogo per i casi in cui  $v = 0$  e  $w = 0$ , considerando al posto di  $\mathbf{i}_0$  i vettori  $\mathbf{j}_0 = (i, 0, k)$  e  $\mathbf{k}_0 = (i, j, 0)$ .

Figura 3.5:  $\mathbf{u} = (u, v, w)$ , dove  $u = 0$ 

### 3.7 La proprietà di suddivisione per triangoli di Bézier

Consideriamo due patch triangolari di Bézier, aventi per dominio due triangoli di  $\mathbb{E}^2$  con un lato in comune e vertici  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{d}$  come in Figura 3.6. In questo caso il lato in comune è  $\mathbf{bc}$ ; il punto  $\mathbf{d}$  può essere espresso in

Figura 3.6: *Dominio*

funzione di  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$  nel modo seguente.

$$\mathbf{d} = v_1\mathbf{a} + v_2\mathbf{b} + v_3\mathbf{c}, \text{ con } v_1 + v_2 + v_3 = 1,$$

perchè

$$\mathbf{d} - \mathbf{a} = \lambda(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + \mu(\mathbf{c} - \mathbf{a}),$$

per opportuni  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

Scegliamo un sistema di riferimento in modo che le coordinate baricentriche dei vertici  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$ , rispetto al dominio del primo dei due patch,  $\mathbf{b}^n$ , siano

$$\mathbf{a} = \mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{e}_3.$$

Abbiamo cioè che le coordinate baricentriche di  $\mathbf{a}$  sono  $(1, 0, 0)$ , di  $\mathbf{b}$  sono  $(0, 1, 0)$  e di  $\mathbf{c}$  sono  $(0, 0, 1)$ . Tramite questa scelta di coordinate baricentriche è possibile ottenere il valore della funzione  $\mathbf{b}$  su tutti i punti dell'unione dei due triangoli. Vediamo come.

Ovviamente il valore di  $\mathbf{b}$  all'interno del dominio  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  (cioè  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ) è noto. Per conoscere il valore della funzione  $\mathbf{b}$  nel secondo triangolo è sufficiente conoscere i punti del poliedro di controllo del secondo patch con dominio  $\mathbf{d}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ , ovvero  $\mathbf{d}, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . È intuitivo pensare che questi siano dati da

$$\mathbf{c}_i = \mathbf{b}[\mathbf{d}^{<i>}, \mathbf{e}_2^{<j>}, \mathbf{e}_3^{<k>}] \quad (3.23)$$

con  $i + j + k = n$ . Infatti, sappiamo già che se vogliamo conoscere i punti di controllo di un patch triangolare a partire dai tre vertici del suo dominio, è sufficiente valutare la funzione blossom relativa al patch come in (3.5). Nel nostro caso, le coordinate baricentriche dei vertici del secondo triangolo considerato rispetto ai vertici del triangolo  $\mathbf{abc}$  sono  $\mathbf{d}, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ : esse identificano la posizione dei punti di controllo del secondo triangolo grazie alla (3.23).

Una volta noti i punti di controllo del poliedro relativo al secondo triangolo, l'algoritmo di de Casteljau ci permetterà di conoscere il valore di  $\mathbf{b}$  sul dominio indicato dalla figura 3.6, come promesso.

Questa tecnica ci dà un metodo efficace per ricavare i vertici di controllo di una superficie complessa, a partire dai vertici della triangolazione considerata

per approssimarla. Per esempio: i vertici dei due poliedri di controllo relativi a due domini triangolari adiacenti, in generale, saranno tali da garantire almeno una saldatura di classe  $C^0$ , quindi quando i  $\mathbf{c}_i$  appartengono alla frontiera fra i due triangoli (ovvero se  $u = 0$ ), deve valere

$$\mathbf{c}_{\mathbf{i}_0} = \mathbf{b}[\mathbf{e}_2^{<j>}, \mathbf{e}_3^{<k>}] = \mathbf{b}_{\mathbf{i}_0},$$

dove  $j + k = n$  e  $\mathbf{i}_0 = (0, j, k)$ . In effetti, la (3.23), quando  $\mathbf{i}_0 = (0, j, k)$ , dice che  $\mathbf{c}_{\mathbf{i}_0} = \mathbf{b}[\mathbf{e}_2^{<j>}, \mathbf{e}_3^{<k>}]$ , come deve essere.

La (3.23) permette di conoscere i punti di controllo dell'estensione di  $\mathbf{b}^n$  ad un patch adiacente. Tuttavia, poichè questo algoritmo *non* usa combinazioni convesse di punti, risulta numericamente poco stabile.

Supponiamo ora di usare la (3.23) quando  $\mathbf{d}$  è un punto interno al triangolo  $\mathbf{abc}$ . In tal caso le combinazioni usate sono convesse e, se applichiamo il metodo sopra descritto, a rotazione, sui tre sottotriangoli definiti nel punto  $\mathbf{d}$  otteniamo tre nuovi patch triangolari di Bézier, dello stesso grado, la cui unione costituisce il patch originale.

Si ha così che la (3.23) definisce il cosiddetto *algoritmo di suddivisione* (si veda la sezione 1.6 per la suddivisione nel caso delle curve di Bézier). Se ci limitiamo a considerare i soli vertici dei vari poliedri che si vengono così a creare otteniamo un infittimento del poliedro iniziale che convergerà man mano alla superficie iniziale (si confronti con la sezione 1.6).

### 3.8 Differenziabilità e superfici composte

Consideriamo nuovamente la Figura 3.6. Ogni segmento nel dominio che attraversa il lato comune viene mappato in una curva composta in  $\mathbb{E}^3$ , avente un tratto sul supporto di ciascuno dei due patch triangolari.

**Definizione 10** (Continuità di classe  $C^r$ ). Se tutte le curve composte ottenute mappando segmenti che attraversano lati comuni di due domini triangolari adiacenti sono curve di classe  $C^r$  di  $\mathbb{E}^3$ , si dice che i due patch si saldano lungo il lato comune con continuità di classe  $C^r$ .

Supponiamo, come nella figura 3.6, che la saldatura si realizzi lungo l'immagine del lato  $\mathbf{bc}$ . Allora vale la seguente

**Proposizione 7.** Condizione necessaria e sufficiente affinché due patch triangolari aventi domini adiacenti come nella figura 3.6 si saldino con continuità di classe  $C^r$  è che

$$\mathbf{c}_{(\rho,j,k)} = \mathbf{b}_{\mathbf{i}_0}^\rho(\mathbf{d}); \quad \rho = 0, \dots, r, \quad (3.24)$$

dove  $\mathbf{c}_{(\rho,j,k)}$  indica i punti del poliedro di controllo del patch definito sul triangolo  $\mathbf{bcd}$ ,  $\mathbf{b}$  è il patch definito sul triangolo  $\mathbf{abc}$  e  $\mathbf{i}_0 = (0, j, k)$  esprime il modo in cui vengono incollati i due patch triangolari (in questo caso, come già detto, lungo il lato  $\mathbf{bc}$ ).

Illustriamo il significato di questa proposizione: per avere continuità di classe  $C^2$  devono essere verificate tutte le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{0jk} &= \mathbf{b}_{0jk}^0(\mathbf{d}), \\ \mathbf{c}_{1jk} &= \mathbf{b}_{0jk}^1(\mathbf{d}), \\ \mathbf{c}_{2jk} &= \mathbf{b}_{0jk}^2(\mathbf{d}). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Ovviamente la (3.24) garantisce la buona saldatura solo lungo il lato  $\mathbf{bc}$ , ovvero quando  $u = 0$ . Analogamente si ricavano condizioni per i casi di  $v = 0$  e  $w = 0$ , cioè incollando i due patch triangolari lungo gli altri due lati.

**Osservazione 4.** Consideriamo i due seguenti casi particolari per la condizione sopra enunciata.

- $r = 0$ : per avere una continuità di classe  $C^0$ , i due patch devono possedere una frontiera comune (ciò si deduce dalla prima uguaglianza di (3.25)).
- $r = 1$ : se  $\mathbf{d} = (\alpha, \beta, \gamma)$ , la (3.24) diventa

$$\mathbf{c}_{1jk} = \alpha \mathbf{b}_{1,j,k} + \beta \mathbf{b}_{0,j+1,k} + \gamma \mathbf{b}_{0,j,k+1}. \quad (3.26)$$



Per verificare l'uguaglianza precedente, basta utilizzare la (3.1) applicata a  $\mathbf{b}_{(0,j,k)}^1$ . Si osserva così che  $\mathbf{c}_{(1,j,k)}$  è ottenuto come combinazione baricentrica dei vertici di un sottotriangolo di frontiera del poliedro di controllo di partenza, perciò appartiene al piano determinato da quei tre punti. Inoltre, per tutti i vertici di controllo per cui  $j + k = n - 1$ , queste combinazioni baricentriche sono identiche. Si ha così che tutte le coppie di sottotriangoli relativi a questi punti sono coplanari e ogni coppia è l'immagine tramite una mappa affine della coppia di triangoli appartenenti al dominio relativi ai due patch, come si vede nella figura 3.7. Le coppie di triangoli coplanari prendono il nome di *coppie affini*. Per chiarire meglio, facciamo un esempio. Si

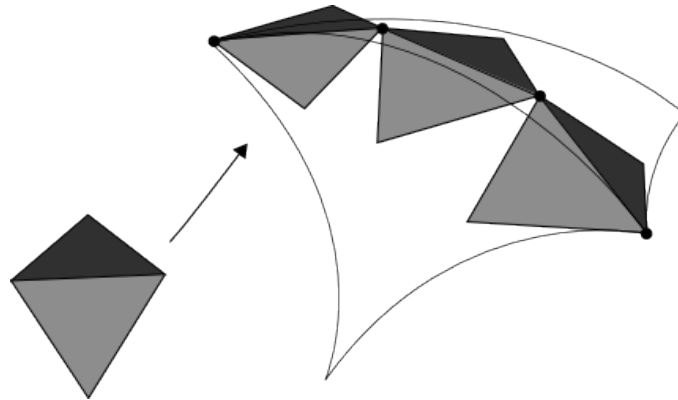


Figura 3.7: *Continuità di classe  $C^1$*

veda la figura 3.8: il punto di controllo  $\mathbf{c}_{110}$  appartiene al piano definito dai tre punti del poliedro di controllo indicati con un pallino nero; il punto  $\mathbf{c}_{101}$  sta invece sul piano definito dai punti indicati con una stella grigia; il punto  $\mathbf{c}_{011}$  è sia un punto col pallino nero, sia uno con una stella grigia.

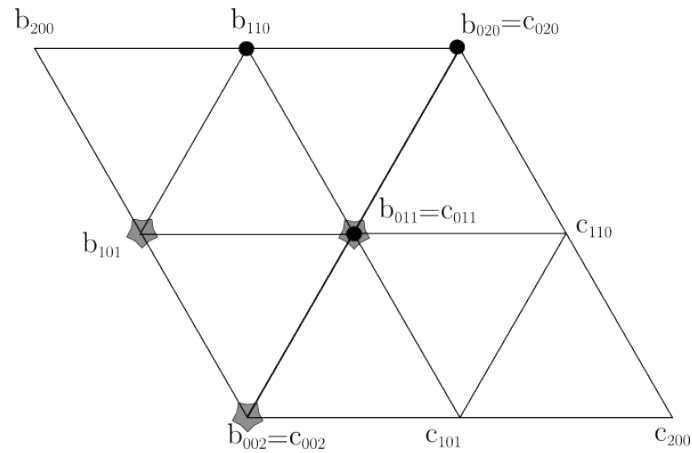


Figura 3.8: Coppie affini

### 3.9 L'innalzamento di grado per triangoli di Bézier

**Proposizione 8.** Come per le curve di Bézier, è possibile esprimere un triangolo di Bézier  $\mathbf{b}^n$  come un triangolo di Bézier di grado  $n + 1$ :

$$\sum_{|\mathbf{i}|=n} \mathbf{b}_{\mathbf{i}} B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{j}|=n+1} \hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{j}} B_{\mathbf{j}}^{n+1}(\mathbf{u}). \quad (3.27)$$

I vertici di controllo  $\hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{j}}$  si ricavano a partire da quelli del triangolo di Bézier di grado  $n$  nel modo seguente:

$$\hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{j}} = \frac{1}{n+1} [x\mathbf{b}_{\mathbf{j}-\mathbf{e}_1} + y\mathbf{b}_{\mathbf{j}-\mathbf{e}_2} + z\mathbf{b}_{\mathbf{j}-\mathbf{e}_3}], \quad (3.28)$$

con  $\mathbf{i} = (i, j, k)$ ,  $x = i + 1$ ,  $y = j + 1$  e  $z = k + 1$ .

*Dimostrazione.* Tale dimostrazione non fa uso dei blossom, tuttavia è riportata di seguito per completezza.

Indichiamo con  $\mathbf{u} = (u, v, w)$ , con  $\mathbf{i} = (i, j, k)$ , con  $\mathbf{j}$  un vettore tridimensionale tale che  $|\mathbf{j}| = |\mathbf{i}| + 1$  e moltiplichiamo il membro a sinistra nell'equa-

zione (3.27) per  $u + v + w$ . Otteniamo la seguente catena di uguaglianze:

$$\begin{aligned}
(u + v + w) \sum_{|\mathbf{i}|=n} \mathbf{b}_i B_i^n(\mathbf{u}) &= (u + v + w) \sum_{|\mathbf{i}|=n} \mathbf{b}_i \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k \\
&= \sum_{|\mathbf{i}|=n} \mathbf{b}_i \frac{n!}{i!j!k!} \binom{n+1}{n+1} \binom{i+1}{i+1} u^{i+1} v^j w^k \\
&+ \sum_{|\mathbf{i}|=n} \mathbf{b}_i \frac{n!}{i!j!k!} \binom{n+1}{n+1} \binom{j+1}{j+1} u^i v^{j+1} w^k \\
&+ \sum_{|\mathbf{i}|=n} \mathbf{b}_i \frac{n!}{i!j!k!} \binom{n+1}{n+1} \binom{k+1}{k+1} u^i v^j w^{k+1} \\
&= \sum_{\substack{|\mathbf{j}|=n+1 \\ |\mathbf{i}|=n}} \mathbf{b}_i \underbrace{\frac{(n+1)!}{(i+1)!j!k!} u^{i+1} v^j w^k}_{B_j^{n+1}(\mathbf{u})} \binom{i+1}{n+1} \\
&+ \sum_{\substack{|\mathbf{j}|=n+1 \\ |\mathbf{i}|=n}} \mathbf{b}_i \underbrace{\frac{(n+1)!}{i!(j+1)!k!} u^i v^{j+1} w^k}_{B_j^{n+1}(\mathbf{u})} \binom{j+1}{n+1} \\
&+ \sum_{\substack{|\mathbf{j}|=n+1 \\ |\mathbf{i}|=n}} \mathbf{b}_i \underbrace{\frac{(n+1)!}{i!j(k+1)!} u^i v^j w^{k+1}}_{B_j^{n+1}(\mathbf{u})} \binom{k+1}{n+1} \\
&= \sum_{|\mathbf{j}|=n+1} \binom{i+1}{n+1} \mathbf{b}_{\mathbf{j}-\mathbf{e}_1} B_j^{n+1}(\mathbf{u}) + \sum_{|\mathbf{j}|=n+1} \binom{j+1}{n+1} \mathbf{b}_{\mathbf{j}-\mathbf{e}_2} B_j^{n+1}(\mathbf{u}) \\
&+ \sum_{|\mathbf{j}|=n+1} \binom{k+1}{n+1} \mathbf{b}_{\mathbf{j}-\mathbf{e}_3} B_j^{n+1}(\mathbf{u}) \\
&= \sum_{|\mathbf{j}|=n+1} \frac{1}{n+1} [(i+1)\mathbf{b}_{\mathbf{j}-\mathbf{e}_1} + (j+1)\mathbf{b}_{\mathbf{j}-\mathbf{e}_2} + (k+1)\mathbf{b}_{\mathbf{j}-\mathbf{e}_3}] B_j^{n+1}
\end{aligned}$$

Se ora poniamo

$$i + 1 = x$$

$$j + 1 = y$$

$$k + 1 = z$$

giungiamo alla tesi. □

Vediamo con un esempio in cosa consiste questa tecnica passando da un triangolo di Bézier di grado 2 a uno di grado 3. A partire dai vertici di

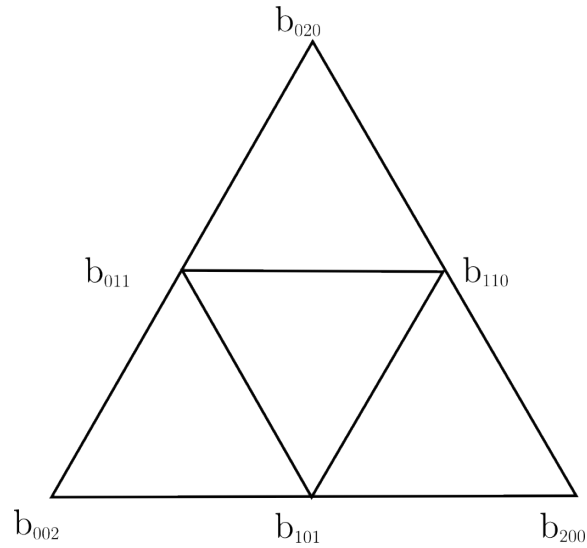


Figura 3.9: *Triangolo di Bézier di grado 2*

controllo indicati in Figura 3.9, si ricavano i  $\hat{\mathbf{b}}_j$  relativi all'innalzamento di grado:

$$\hat{\mathbf{b}}_{003} = \mathbf{b}_{002}$$

$$\hat{\mathbf{b}}_{102} = \frac{1}{3}[\mathbf{b}_{002} + 2\mathbf{b}_{101}]$$

$$\hat{\mathbf{b}}_{201} = \frac{1}{3}[2\mathbf{b}_{101} + \mathbf{b}_{200}]$$

$$\hat{\mathbf{b}}_{300} = \mathbf{b}_{200}$$

$$\hat{\mathbf{b}}_{012} = \frac{1}{3}[\mathbf{b}_{002} + 2\mathbf{b}_{011}]$$

$$\hat{\mathbf{b}}_{111} = \frac{1}{3}[\mathbf{b}_{011} + \mathbf{b}_{101} + \mathbf{b}_{110}]$$

$$\hat{\mathbf{b}}_{210} = \frac{1}{3}[2\mathbf{b}_{110} + \mathbf{b}_{200}]$$

$$\hat{\mathbf{b}}_{021} = \frac{1}{3}[2\mathbf{b}_{011} + \mathbf{b}_{020}]$$

$$\hat{\mathbf{b}}_{120} = \frac{1}{3}[\mathbf{b}_{020} + 2\mathbf{b}_{110}]$$

$$\hat{\mathbf{b}}_{030} = \mathbf{b}_{020}$$

La Figura 3.10 indica le posizioni dei nuovi vertici di controllo.

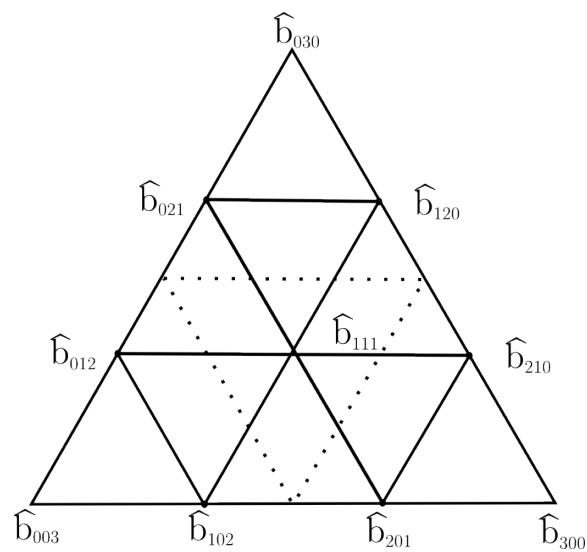


Figura 3.10: *Triangolo di Bézier di grado 3*

L'innalzamento di grado può essere ripetuto e questo processo genera una sequenza di poliedri di controllo che al limite convergono alla superficie desiderata.

# Bibliografia

- [1] Gerald Farin. *Curves and surfaces for CAGD: a practical guide*. Morgan Kaufmann Publishers, Quinta edizione, 2002.
- [2] J. Gallier. *Curves and surfaces in geometric modeling: theory and algorithms*. Morgan Kaufmann Publishers, 1998.
- [3] L. Ramshaw. Blossoming: a connect-the-dots approach to splines. *Technical report, Digital Systems Research Center, Palo Alto, Ca*, 1987.