

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica



IL TEOREMA DI GAUSS-BONNET

Relatore: Prof. Alberto Alzati

**Elaborato finale di:
Carlotta Mangiagalli
Matricola: 723424**

**Sessione III
Anno Accademico 2010/2011**

Ai miei affetti di ieri,
a quelli di oggi...
...e a quelli di domani.

Indice

Introduzione	3
Notazioni usate	6
Richiami sulle curve e sulle superfici	7
0.1 Teoria locale delle curve	7
0.1.1 Il concetto di curva	7
0.1.2 Lunghezza d'arco	7
0.2 Teoria locale delle superfici	8
0.2.1 Definizione di superficie	8
0.2.2 Curvature	11
0.2.3 Geodetiche	18
1 Il teorema di Gauss-Bonnet locale	24
1.1 Indice di rotazione di poligoni curvilinei su superfici	24
1.2 Il teorema di Gauss-Bonnet locale	27
2 Triangolazioni	32
2.1 Definizione	32
2.2 Esistenza di triangolazioni	35
3 Il teorema di Gauss-Bonnet globale e alcune applicazioni	46
3.1 Il teorema di Gauss-Bonnet globale	46
3.2 Applicazioni	52
3.2.1 Regioni regolari con bordo	52
3.2.2 Regioni regolari senza bordo	58
3.2.3 Problemi di vario genere	59
Bibliografia	62
Ringraziamenti	63

Introduzione

Il *teorema di Gauss-Bonnet* è uno dei tipici esempi del fatto che la Matematica, benchè tradizionalmente insegnata per settori, costituisca in realtà un corpo disciplinare unico.

Questo teorema infatti mette a confronto due approcci diversi verso lo studio delle superfici, quello puramente topologico e quello differenziale, traendone un esito apparentemente sorprendente. Inoltre costituisce probabilmente il primo teorema di questo tipo che uno studente incontra nel corso della sua carriera. Spesso però, per ragioni di tempo, la sua dimostrazione viene omessa oppure è solo accennata rapidamente.

Nel presente elaborato abbiamo voluto quindi fornirne una dimostrazione completa, dopo aver introdotto tutte le definizioni utili alla sua comprensione e aver richiamato dettagliatamente tutte le nozioni necessarie. La trattazione quindi risulta esauriente ed è, inoltre, accessibile ad ogni studente che abbia seguito alcuni corsi base di Geometria. Al termine dell'elaborato abbiamo anche segnalato alcune applicazioni del teorema.

Esistono diverse versioni del teorema in oggetto ed anche alcune sue generalizzazioni per varietà differenziabili di dimensione maggiore di due, qui però ci siamo limitati a considerare la versione classica, relativa a superfici orientabili e compatte, immerse nello spazio euclideo.

Teorema di Gauss-Bonnet (1848): *Sia $R \subseteq S$ una regione regolare di una superficie S orientata, con ∂R orientato positivamente. Siano C_1, \dots, C_s le componenti del bordo di R , parametrizzate per $j = 1, \dots, s$ dalle curve $\sigma_j : [a_j, b_j] \rightarrow S$ con curvatura geodetica κ_g^j (e se $R = S$ allora $\partial R = \emptyset$). Indichiamo, inoltre, con $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p\}$ l'insieme di tutti gli angoli esterni delle curve $\sigma_1, \dots, \sigma_s$. Allora*

$$\int_R K dv + \sum_{j=1}^s \int_{a_j}^{b_j} \kappa_g^j ds + \sum_{h=1}^p \varepsilon_h = 2\pi\chi(R).$$

dove χ è la caratteristica di Eulero-Poincaré di R .

Come si vede dal precedente enunciato, il teorema riguarda la teoria globale delle superfici: connette la caratteristica di Eulero-Poincaré, oggetto globale e dipendente solo dalla topologia di una superficie, con la curvatura Gaussiana e la curvatura geodetica, oggetti locali e dipendenti dalla sua struttura differenziale. Una conseguenza apparentemente paradossale del teorema è che, per quanto si possa deformare una sfera, senza romperla, ma cambiando localmente e in modo arbitrario il valore della curvatura Gaussiana, l'integrale di questa rimane costante su tutta la superficie.

L'elaborato è strutturato come segue:

- *Richiami sulle curve e sulle superfici*

Si tratta di una raccolta di nozioni di base sulla teoria delle curve e delle superfici, utile per iniziare a familiarizzare con due dei quattro protagonisti principali che intervengono nell'enunciato del *teorema di Gauss-Bonnet*: curvatura Gaussiana e curvatura geodetica.

Le dimostrazioni relative a questa sezione vengono rinviate al testo di riferimento [1].

- *Capitolo 1: il teorema di Gauss-Bonnet in versione locale*

Per prima cosa vengono introdotti i concetti di poligono curvilineo, indice di rotazione di una curva e angolo esterno in un punto angoloso di una curva tracciata su una superficie, quest'ultimo sarà il terzo protagonista.

La versione locale del *teorema di Gauss-Bonnet* è un enunciato riguardante regioni regolari particolari contenute nell'immagine di una parametrizzazione locale di una superficie: le regioni regolari semplici, cioè sottoinsiemi compatti connessi di una superficie, omeomorfi ad un disco chiuso, ottenute come chiusura del loro interno, con bordo parametrizzato da un poligono curvilineo. Su di esse la curvatura Gaussiana integrata lungo la regione, la curvatura geodetica del bordo e gli angoli esterni del bordo si combinano tra loro in modo tale da dare sempre 2π . In modo più formale

Teorema di Gauss-Bonnet locale: *Sia $R \subset S$ una regione regolare semplice contenuta nell'immagine di una parametrizzazione locale ortogonale $\varphi : U \rightarrow S$. Indichiamo con $\sigma : [a, b] \rightarrow S$ una parametrizzazione rispetto alla lunghezza d'arco del bordo di R , orientata positivamente rispetto a φ , di angoli esterni $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k \in (-\pi, \pi)$. Infine orientiamo $\varphi(U)$ scegliendo $N = \partial_1 \wedge \partial_2 / \|\partial_1 \wedge \partial_2\|$ come campo di versori normali. Allora*

$$\int_R K dv + \int_a^b \kappa_g ds + \sum_{j=1}^k \varepsilon_j = 2\pi,$$

dove κ_g è la curvatura geodetica di σ e K è la curvatura Gaussiana di S .

In questa sezione è presentata anche la dimostrazione del *teorema di Gauss-Green*, importante risultato dell'Analisi Matematica, che è indispensabile strumento per dimostrare la versione locale del *teorema di Gauss-Bonnet*.

- *Capitolo 2: triangolazioni*

Per poter arrivare a dimostrare la versione globale del *teorema di Gauss-Bonnet* abbiamo bisogno di suddividere una superficie in opportune porzioni più piccole, per poi, a ciascuna di esse applicare il *teorema di Gauss-Bonnet* locale. Questa suddivisione prende il nome di *triangolazione topologica*: in questo capitolo ne diamo una definizione e proviamo che per le superfici da noi considerate una tale suddivisione è sempre possibile.

Inoltre, il capitolo contiene una digressione sulla topologia delle superfici il cui scopo è di introdurre un invariante topologico: la caratteristica di Eulero-Poincaré (quarto ed ultimo protagonista) che compare al membro destro dell'equazione del *teorema di Gauss-Bonnet* globale.

- *Capitolo 3: il teorema di Gauss-Bonnet globale e alcune applicazioni*

Prima di dare la dimostrazione del *teorema di Gauss-Bonnet* in versione globale, è necessario risolvere un paio di problemi: per prima cosa calcolare l'integrale della curvatura Gaussiana anche per funzioni definite su una regione regolare non necessariamente contenuta nell'immagine di una parametrizzazione locale per una superficie e in secondo luogo trattare il problema dell'orientabilità della regione regolare a cui viene applicato il teorema in relazione all'orientazione presente sulla superficie.

Per concludere abbiamo inserito una serie di applicazioni del teorema riguardanti: regioni (con bordo) non semplici di una superficie, triangoli geodetici e natura dei punti regolari di una superficie.

Notazioni usate

- Nel seguito useremo sempre la lettera s per indicare il parametro lunghezza d'arco e la lettera t per indicare un parametro qualsiasi. Scriveremo σ' per indicare $d\sigma/dt$ e $\dot{\sigma}$ per $d\sigma/ds$. La relazione tra $\dot{\sigma}$ e σ' segue facilmente dalla formula di derivazione di funzione composta:

$$\sigma'(t) = \frac{d\sigma}{dt}(t) = \frac{d\sigma}{ds}(s(t)) \times \frac{ds}{dt}(t) = \|\sigma'(t)\| \dot{\sigma}(s(t)),$$

dato che $\frac{ds}{dt} = \|\sigma'(t)\|$.

Analogamente si ha

$$\dot{\sigma}(s) = \frac{1}{\|\sigma'(t(s))\|} \sigma'(t(s)).$$

- Per brevità scriveremo spesso $\partial_j|_p$ invece di $\partial/\partial x_j|_p$, dove x_1, \dots, x_n sono le coordinate in uno spazio affine.
- Useremo quasi sempre la frase *sia $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva* per dire che σ è una specifica parametrizzazione della curva che stiamo considerando.
- Il prodotto scalare è indicato da $\langle \cdot, \cdot \rangle$, mentre quello vettoriale da \wedge .
- Per brevità useremo $\underline{0}$ per indicare $\underline{0} = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ o più in generale $\underline{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$.
- e_j è il j -esimo versore del sistema di riferimento affine di \mathbb{R}^n .
- x indicherà il vettore $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
- La lettera J indicherà una matrice Jacobiana.

Richiami sulle curve e sulle superfici

0.1 Teoria locale delle curve

0.1.1 Il concetto di curva

Definizione 0.1 (Curva parametrizzata). Sia $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ e $n \geq 2$. Una *curva parametrizzata* di classe C^k in \mathbb{R}^n è un'applicazione $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe C^k dove $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo. L'immagine $\sigma(I)$ sarà detta *sostegno* della curva; la variabile $t \in I$ *parametro della curva*. Se $I=[a,b]$ e $\sigma(a) = \sigma(b)$, diremo che la curva è *chiusa*.

Osservazione 0.1. Se σ è chiusa di classe C^k supporremo sempre che $\sigma^{(i)}(a) = \sigma^{(i)}(b) \forall i = 1, \dots, k$

Definizione 0.2 (Curve parametrizzate equivalenti). Due curve parametrizzate $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\tilde{\sigma} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe C^k sono *equivalenti* se esiste un diffeomorfismo $f : \tilde{I} \rightarrow I$ di classe C^k tale che $\tilde{\sigma} = \sigma \circ f$; chiameremo $\tilde{\sigma}$ una *riparametrizzazione* di σ e diremo che f è un *cambiamento di parametro*.

Definizione 0.3 (Curva). Una *curva* di classe C^k in \mathbb{R}^n è una classe di equivalenza di curve parametrizzate di classe C^k in \mathbb{R}^n . Un elemento della classe d'equivalenza sarà chiamato *parametrizzazione della curva*.

Definizione 0.4 (Curva semplice). Una curva $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è detta *semplice* se σ è iniettiva su $[a, b)$ e su $(a, b]$.

0.1.2 Lunghezza d'arco

Lavorare con classi d'equivalenza, in generale, è sempre faticoso; bisogna scegliere un rappresentante e controllare che tutti i risultati che si ottengono non dipendano dal rappresentante scelto. Esiste però una vasta classe di curve, dette *curve regolari*, per cui è possibile scegliere in modo canonico una parametrizzazione che rappresenta bene la geometria della curva: la *parametrizzazione rispetto alla lunghezza d'arco*.

Definizione 0.5 (Vettore tangente, retta tangente affine). Sia $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva parametrizzata di classe (almeno) C^1 . Il vettore $\sigma'(t)$ è il *vettore tangente* alla curva nel punto $\sigma(t)$. Se $t_0 \in I$ è tale che $\sigma'(t_0) \neq \underline{0}$, allora la retta passante per $\sigma(t_0)$ e parallela a $\sigma'(t_0)$ è detta *retta tangente affine* alla curva nel punto $\sigma(t_0)$.

Definizione 0.6 (Curva regolare). Sia $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva parametrizzata di classe (almeno) C^1 . Se $\sigma'(t) \neq \underline{0}$ per ogni $t \in I$ diremo che σ è una *curva regolare*.

Definizione 0.7 (Curva fortemente regolare). Sia $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regolare. Se

$$\sigma'(t) \wedge \sigma''(t) \neq \underline{0}$$

per ogni $t \in I$ diremo che la curva è *fortemente regolare*.

Definizione 0.8 (Lunghezza d'arco). Sia $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva di classe C^k (con $k \geq 1$). Fissato $t_0 \in I$, la *lunghezza d'arco* di σ (misurata a partire da t_0) è la funzione $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^k data da

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\sigma'(\tau)\| d\tau.$$

Diremo poi che σ è *parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco* se $\|\sigma'(t)\| \equiv 1$. In altre parole, σ è parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco se e solo se la sua lunghezza d'arco coincide col parametro t a meno di una traslazione, cioè $s(t) = t - t_0$.

Osservazione 0.2. Una curva parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco è chiaramente regolare.

0.2 Teoria locale delle superfici

0.2.1 Definizione di superficie

Cominciamo introducendo la generalizzazione del concetto di curva regolare

Definizione 0.9 (Superficie parametrizzata). Una *superficie parametrizzata* nello spazio è un'applicazione $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe C^∞ , dove $U \subseteq \mathbb{R}^2$ è omeomorfo ad un disco aperto, tale che il differenziale $d\varphi_x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sia iniettivo (cioè abbia rango 2) in ogni punto $x \in U$. L'immagine $\varphi(U)$ di φ è il *sostegno* della superficie parametrizzata.

Osservazione 0.3. Il differenziale $d\varphi_x$ di $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ in $x \in U$ è rappresentato dalla matrice jacobiana

$$J\varphi(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_2}(x) \end{vmatrix} \in \text{Mat}_{3,2}(\mathbb{R}).$$

Definizione 0.10 (Superficie). Un sottoinsieme connesso $S \in \mathbb{R}^3$ è una *superficie (regolare)* nello spazio se $\forall p \in S$ esiste un'applicazione $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe C^∞ , con $U \subseteq \mathbb{R}^2$ omeomorfo ad un disco aperto, tale che:

- i) $\varphi(U) \subseteq S$ sia un intorno aperto di p in S nella topologia indotta da quella di \mathbb{R}^3 ;
- ii) φ sia un omeomorfismo con l'immagine;
- iii) il differenziale $d\varphi_x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sia iniettivo $\forall x \in U$.

Ogni applicazione φ che soddisfi i)- iii) è detta *parametrizzazione locale* (o *regolare*) in p .

Se $0 \in U$ e $\varphi(0) = p$ diremo che la parametrizzazione è *centrata* in p .

L'inversa $\varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow U$ è detta *carta locale* in p .

L'intorno $\varphi(U)$ di p in S è detto *intorno coordinato*.

Le coordinate $(x_1(p), x_2(p)) = \varphi^{-1}(p)$ sono dette *coordinate locali* di p e per $j = 1, 2$ la curva $t \mapsto \varphi(x_0 + te_j) \forall x_0 = (x_1(p), x_2(p)) \in U$ è detta *curva coordinata j-esima* passante per p .

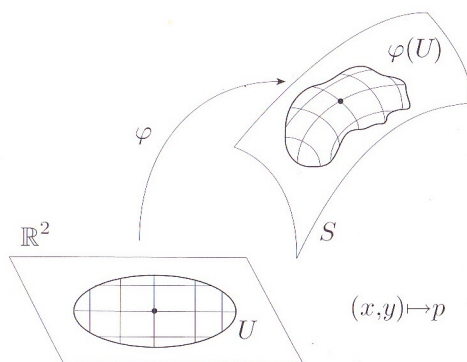


Figura 1: Una parametrizzazione locale

Osservazione 0.4. Una parametrizzazione locale $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ di una superficie S trasporta la topologia dell'aperto U del piano nella topologia

dell'aperto $\varphi(U)$ di S , poichè φ è un omeomorfismo tra U e $\varphi(U)$. Inoltre φ trasporta un sistema di coordinate (Figura 1): la parametrizzazione locale φ , infatti, permette di associare a ciascun punto $p \in \varphi(U)$ una coppia di numeri reali $(x, y) = \varphi^{-1}(p)$ che svolgeranno un ruolo di coordinate di p in S analogo al ruolo svolto dalle usuali coordinate cartesiane per i punti del piano.

Proposizione 0.1. *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto e $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizzata con sostegno contenuto in S . Allora:*

1. $\varphi(U)$ è aperto in S ;
2. se φ è iniettiva, allora per ogni $p \in \varphi(U)$ esistono un intorno $W \subset \mathbb{R}^3$ di p in \mathbb{R}^3 con $W \cap S \subseteq \varphi(U)$ e una $\Phi : W \rightarrow \mathbb{R}^2$ di classe C^∞ tali che $\Phi(W) \subseteq U$ e $\Phi|_{W \cap S} \equiv \varphi^{-1}|_{W \cap S}$. In particolare, $\varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow U$ è continua, per cui φ è una parametrizzazione locale di S .

Dimostrazione. Si faccia riferimento al testo [1] pagina 131. □

Definizione 0.11 (Parametrizzazione locale ortogonale). Diremo che la parametrizzazione locale φ di una superficie S è *ortogonale* se le sue curve coordinate si intersecano ortogonalmente.

Definizione 0.12 (Vettore e cono tangenti). Sia $S \in \mathbb{R}^3$ un insieme e $p \in S$. Un vettore tangente a S in p è un *vettore tangente* $\sigma'(0)$, dove $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ è una curva di classe C^∞ con sostegno in S e tale che $\sigma(0) = p$. L'insieme di tutti i possibili vettori tangenti a S in p è il *cono tangente* $T_p S$ a S in p .

Poichè le parametrizzazioni locali ci permettono di trasportare nozioni dagli aperti del piano alle superfici otteniamo allora la seguente:

Proposizione 0.2. *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, $p \in S$ e $\varphi : U \rightarrow S$ una parametrizzazione locale in p con $\varphi(x_0) = p$, dove $x_0 = (x_1(p), x_2(p)) \in U$. Allora $d\varphi_{x_0} : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_p S$ è un isomorfismo.*

Dimostrazione. Si rimanda a [1] pagina 136. □

Osservazione 0.5.

- i) $T_p S = d\varphi_{x_0}(\mathbb{R}^2)$ è uno spazio vettoriale di dimensione 2.
- ii) $d\varphi_{x_0}(\mathbb{R}^2)$ non dipende da φ ma solo da S e p .

Definizione 0.13 (Piano tangente). Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie e $p \in S$. Lo spazio vettoriale $T_p S \subset \mathbb{R}^3$ è detto *piano tangente* a S in p .

Definizione 0.14 (Vettori tangenti). Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie e $p \in S$. Se $\varphi : U \rightarrow S$ è una parametrizzazione locale centrata in p e $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ è la base canonica di \mathbb{R}^2 , allora definiamo i vettori tangenti $\partial/\partial x_1|_p, \partial/\partial x_2|_p \in T_p S$ ponendo

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p = d\varphi_{\underline{0}}(\mathbf{e}_j) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}(\underline{0}) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_j}(\underline{0}) \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_j}(\underline{0}) \end{vmatrix}.$$

Osservazione 0.6. Ovviamente $\{\partial_1|_p, \partial_2|_p\}$ è una base di $T_p S$: più precisamente è la base indotta dalla parametrizzazione locale φ . Notiamo che $\partial_1|_p$ e $\partial_2|_p$ non sono altro che le due colonne della matrice Jacobiana di φ calcolata in $\underline{0} = \varphi^{-1}(p)$.

0.2.2 Curvature

Ricordiamo:

Definizione 0.15 (Versore tangente). Sia $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regolare di classe C^k . Il versore tangente a σ è l'applicazione $\mathbf{t} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe C^{k-1} data da

$$\mathbf{t} = \frac{\sigma'}{\|\sigma'\|};$$

diremo anche che il versore $\mathbf{t}(t)$ è tangente alla curva σ nel punto $\sigma(t)$.

Osservazione 0.7. Se la curva σ è regolare e parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, per ogni $s \in I$ esiste un unico versore $\tilde{\mathbf{n}}(s)$ ortogonale a

$$\mathbf{t}(s) = \dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{ds}$$

e tale che la coppia $\{\mathbf{t}(s), \tilde{\mathbf{n}}(s)\}$ abbia la stessa orientazione della base canonica. In particolare, l'applicazione $\tilde{\mathbf{n}} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ è di classe C^{k-1} , come \mathbf{t} . Inoltre $\dot{\mathbf{t}}(s)$, essendo ortogonale a $\mathbf{t}(s)$, dev'essere un multiplo di $\tilde{\mathbf{n}}(s)$; quindi esiste una funzione $\tilde{\kappa} : I \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^{k-2} tale che si abbia

$$\dot{\mathbf{t}} = \tilde{\kappa} \tilde{\mathbf{n}}.$$

Definizione 0.16 (Curvatura). Sia $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regolare di classe C^k (con $k \geq 2$) parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco. La curvatura di σ è la funzione $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ di classe C^{k-2} data da

$$\kappa(s) = \|\dot{\mathbf{t}}(s)\| = \|\ddot{\sigma}(s)\|.$$

Diremo che σ è *biregolare* se κ non si annulla mai.

Definizione 0.17 (Curvatura orientata). Sia $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva di classe C^k (con $k \geq 2$) regolare nel piano, parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco; l'applicazione $\tilde{\mathbf{n}} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ di classe C^{k-1} è il versore normale orientato di σ , mentre la funzione $\tilde{\kappa} : I \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^{k-2} è la *curvatura orientata* di σ .

La prima forma fondamentale

Definizione 0.18 (La prima forma fondamentale). Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie. La *prima forma fondamentale* $I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ è la forma quadratica, definita positiva, associata al prodotto scalare:

$$\forall v \in T_p S \quad I_p(v) = \langle v, v \rangle_p \geq 0.$$

Dove con $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ indicheremo il prodotto scalare definito positivo su $T_p S$ indotto dal prodotto scalare canonico.

Ma come ricavare la matrice, variabile, che rappresenta questo prodotto scalare? Dobbiamo usare le parametrizzazioni locali e le basi da loro indotte sui piani tangenti:

sia allora $\varphi : U \rightarrow S$ una parametrizzazione locale in $p \in S$ e $\{\partial_1, \partial_2\}$ la base di $T_p S$ indotta da φ . Presi due vettori tangenti $v, w \in T_p S$, se li riscriviamo come combinazione lineare dei vettori della base, $v = v_1 \partial_1 + v_2 \partial_2$, $w = w_1 \partial_1 + w_2 \partial_2 \in T_p S$, possiamo esprimere $\langle v, w \rangle_p$ in coordinate:

$$\langle v, w \rangle_p = v_1 w_1 \langle \partial_1, \partial_1 \rangle_p + [v_1 w_2 + v_2 w_1] \langle \partial_1, \partial_2 \rangle_p + v_2 w_2 \langle \partial_2, \partial_2 \rangle_p.$$

Definizione 0.19 (Coefficienti metrici). Sia $\varphi : U \rightarrow S$ una parametrizzazione locale di una superficie S . I *coefficienti metrici* di S rispetto a φ sono le funzioni $E, F, G : U \rightarrow \mathbb{R}$ date da

$$E(x) = \langle \partial_1, \partial_1 \rangle_{\varphi(x)}, \quad F(x) = \langle \partial_1, \partial_2 \rangle_{\varphi(x)}, \quad G(x) = \langle \partial_2, \partial_2 \rangle_{\varphi(x)},$$

per ogni $x \in U$.

Osservazione 0.8. I coefficienti metrici sono funzioni di classe C^∞ su U e determinano completamente la prima forma fondamentale:

$$I_p(v) = E(x)v_1^2 + 2F(x)v_1v_2 + G(x)v_2^2 = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ E(x) & F(x) \\ F(x) & G(x) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \end{vmatrix}$$

per ogni $p = \varphi(x)$ e $v = v_1 \partial_1 + v_2 \partial_2 \in T_p S$.

Definizione 0.20 (Applicazione di classe C^∞). Se $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ sono due superfici, diremo che una applicazione $F : S_1 \rightarrow S_2$ è di *classe C^∞* (o *differenziabile*) se per ogni $p \in S_1$ esistono una parametrizzazione locale $\varphi_1 : U_1 \rightarrow S_1$ in p e una parametrizzazione locale $\varphi_2 : U_2 \rightarrow S_2$ in $F(p)$ tali che $\varphi_2^{-1} \circ F \circ \varphi_1$ sia di classe C^∞ .

Definizione 0.21 (Isometria, isometria locale). Sia $H : S_1 \rightarrow S_2$ un'applicazione C^∞ tra due superfici. Diremo che H è un'*isometria* in $p \in S_1$ se per ogni $v \in T_p S$ si ha

$$I_{H(p)}(dH_p(v)) = I_p(v);$$

ovviamente questo implica che

$$\langle dH_p(v), dH_p(w) \rangle_{H(p)} = \langle v, w \rangle_p$$

per ogni $v, w \in T_p S$.

Diremo che H è un'isometria locale in $p \in S_1$ se ogni p ha un intorno U tale che $H|_U$ sia un'isometria in ogni punto di U .

Definizione 0.22 (Determinazione dell'angolo). Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie e $p \in S$. Una determinazione dell'angolo tra due vettori tangenti $v_1, v_2 \in T_p S$ è un $\theta \in \mathbb{R}$ tale che si abbia

$$\cos \theta = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle_p}{\sqrt{I_p(v_1)I_p(v_2)}}.$$

Inoltre se $\sigma_1, \sigma_2 : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ sono due curve con $\sigma_1(0) = \sigma_2(0) = p$, diremo (determinazione dell'angolo tra σ_1 e σ_2 l'angolo tra $\sigma_1'(0)$ e $\sigma_2'(0)$).

Orientabilità

Definizione 0.23 (Campo di vettori e di versori normali). Un campo di vettori normali su una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ è un'applicazione $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe C^∞ tale che $N(p)$ sia ortogonale a $T_p S$ per ogni $p \in S$. Se inoltre $\|N\| \equiv 1$ diremo che N è un campo di versori normali a S (Figura 2).

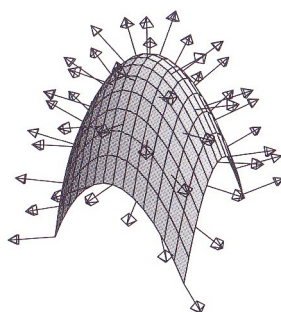


Figura 2: Campo di versori normali

Definizione 0.24 (Atlante). Un atlante di una superficie regolare $S \subset \mathbb{R}^3$ è una famiglia $\mathcal{A} = \{\varphi_\alpha\}$ di parametrizzazioni locali $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow S$ tali che $S = \bigcup_\alpha \varphi_\alpha(U_\alpha)$.

Definizione 0.25 (Superfici equiorientate e orientabilità). Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie. Diremo che due parametrizzazioni locali $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow S$ e $\varphi_\beta :$

$U_\beta \rightarrow S$ sono equiorientate se $\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta) = \emptyset$ oppure $\det[J(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)] > 0$ dove definito, cioè su $\varphi_\alpha^{-1}((U_\alpha) \cap (U_\beta))$. Se invece $\det[J(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)] < 0$ ove definito, diremo che le due parametrizzazioni locali determinano l'orientazione opposta. La superficie S è detta orientabile se esiste un atlante $\mathcal{A} = \{\varphi_\alpha\}$ di S composto da carte a due a due equiorientate.

Proposizione 0.3. Una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ è orientabile se e solo se esiste un campo di versori normali su S .

Dimostrazione. Si rimanda al testo [1] pagina 180. □

Definizione 0.26 (Determinazione orientazione data). Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientata da un atlante \mathcal{A} . Diremo che un campo di versori normali N determina l'orientazione data se si ha

$$N = \frac{\partial_1 \wedge \partial_2}{\|\partial_1 \wedge \partial_2\|}$$

per ogni parametrizzazione locale $\varphi \in \mathcal{A}$.

Curvatura normale e seconda forma fondamentale

L'obiettivo principale di questo paragrafo è arrivare a una definizione significativa del concetto di curvatura di una superficie. Ci sono (almeno) due modi per procedere, uno più geometrico e l'altro più analitico, che però porteranno allo stesso risultato.

Definizione 0.27 (Sezione normale). Sia S una superficie. Dato $p \in S$ scegliamo un versore $N(p) \in \mathbb{R}^3$ ortogonale a $T_p S$. Preso $v \in T_p S$ di lunghezza unitaria, sia H_v il piano passante per p e parallelo a v e $N(p)$. La curva regolare σ parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco con $\sigma(0) = p$ di sostegno l'intersezione $H_v \cap S$ nell'intorno di p è detta sezione normale di S in p lungo v (Figura 3).

Osservazione 0.9. La sezione normale è una curva che dipende solo dalla geometria della superficie S nella direzione del versore tangente v .

La sezione normale rappresenta ragionevolmente bene il comportamento di S nella direzione di v ; quindi la seguente definizione è geometricamente sensata.

Definizione 0.28 (Curvatura normale). Sia S una superficie, $p \in S$ e sia $N(p) \in \mathbb{R}^3$ un versore ortogonale a $T_p S$. Dato $v \in T_p S$ di lunghezza unitaria, orientiamo il piano H_v scegliendo $\{v, N(p)\}$ come base positiva. Diremo allora curvatura normale di S in p lungo v la curvatura orientata in p della curva sezione normale di S in p lungo v .

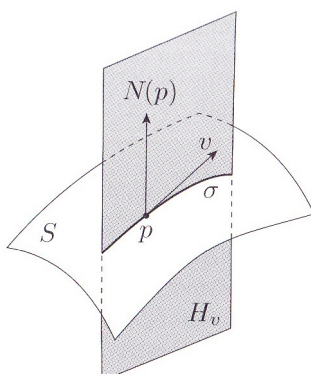


Figura 3: Sezione normale

Il problema di questa definizione di curvatura è che non è chiaro che struttura abbia l'insieme delle curvature normali in un punto della superficie, ammesso che ne abbia una. Per superare questo problema introduciamo ora il secondo approccio, quello analitico. Ci serve una definizione fondamentale:

Definizione 0.29 (Mappa di Gauss). Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientata. La mappa di Gauss di S è il campo di versori normali $N : S \rightarrow S^2$ che identifica l'orientazione data.

Osservazione 0.10.

- i) Anche se per semplicità di esposizione lavoreremo spesso solo con superfici orientate, molto di quanto diremo vale per qualsiasi superficie. Infatti, localmente ogni superficie è orientabile: se $\varphi : U \rightarrow S$ è una parametrizzazione locale in un punto p , allora $N = \partial_1 \wedge \partial_2 / \|\partial_1 \wedge \partial_2\|$ è una mappa di Gauss di $\varphi(U)$. Quindi ogni risultato di natura locale che dimostreremo usando la mappa di Gauss e che non cambia sostituendo $-N$ a N vale in realtà per superfici qualsiasi.
- ii) La mappa di Gauss determina univocamente i piani tangenti alla superficie, poichè $T_p S$ è l'ortogonale di $N(p)$; allora la variazione di N misura come mutano i piani tangenti, cioè quanto la superficie dista dall'essere un piano.

Notiamo che la curvatura di una superficie è legata al differenziale della mappa di Gauss.

Proposizione 0.4. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientata con mappa di Gauss $N : S \rightarrow S^2$. Allora dN_p è un endomorfismo di $T_p S$ simmetrico rispetto al prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ per ogni $p \in S$.

Dimostrazione. Si guardi [1] pagina 188. □

Dal prodotto scalare e dall'endomorfismo simmetrico segue la seguente:

Definizione 0.30 (Seconda forma fondamentale). Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientata con mappa di Gauss $N : S \rightarrow S^2$. La *seconda forma fondamentale* di S è la forma quadratica $Q_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$\forall v \in T_p S \quad Q_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle_p.$$

Osservazione 0.11. La seconda forma fondamentale, come la curvatura normale, ci permette di associare un numero ad ogni versore tangente a una superficie ed inoltre ha a che fare con quanto una superficie si curva.

La seconda forma fondamentale è, al contrario della curvatura normale, molto semplice da calcolare partendo da una parametrizzazione locale. Ma possiamo anche affermare che *la curvatura normale può venire calcolata usando la seconda forma fondamentale*, infatti:

prendiamo una qualsiasi curva $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ in S parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco e poniamo $\sigma(0) = p \in S$ e $\dot{\sigma}(0) = v \in T_p S$. Poniamo $N(s) = N(\sigma(s))$ e chiaramente abbiamo $\langle \dot{\sigma}(s), N(s) \rangle \equiv 0$. Derivando otteniamo

$$\langle \ddot{\sigma}(s), N(s) \rangle \equiv -\langle \dot{\sigma}(s), \dot{N}(s) \rangle.$$

Ma $\dot{N}(0) = dN_p(v)$, quindi

$$Q_p(v) = -\langle dN_p(v), \dot{\sigma}(0) \rangle = \langle \ddot{\sigma}(0), N(p) \rangle.$$

Inoltre, se σ è biregolare si ha $\ddot{\sigma} = \kappa \mathbf{n}$, dove κ è la curvatura di σ e \mathbf{n} è il versore normale principale di σ , per cui in questo caso si ha

$$Q_p(v) = \kappa(0) \langle \mathbf{n}(0), N(p) \rangle.$$

Supponiamo ora che σ sia una sezione normale, allora $\mathbf{n}(0) = \pm N(p)$ e siccome la curvatura normale è definita come curvatura orientata abbiamo che essa coincide con $Q_p(v)$.

Queste formule suggeriscono la seguente

Definizione 0.31 (Curvatura normale). Sia $\sigma : I \rightarrow S$ una curva parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco contenuta in una superficie orientata S . Diremo *curvatura normale* di σ la funzione $\kappa_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$\kappa_n = \langle \ddot{\sigma}, N \circ \sigma \rangle.$$

Inoltre se σ è biregolare vale

$$\kappa_n = \langle \ddot{\sigma}, N \circ \sigma \rangle = \kappa \langle \mathbf{n}, N \circ \sigma \rangle.$$

Osservazione 0.12. In altre parole, la curvatura normale di σ è la lunghezza, con segno, della proiezione del vettore accelerazione $\ddot{\sigma}$ sulla direzione normale alla superficie.

Curvature principali, Gaussiana e media

Vediamo di esaminare meglio le curvature normali usando le proprietà di dN_p . Il fatto cruciale è che dN_p è un endomorfismo simmetrico e quindi è diagonalizzabile.

Definizione 0.32 (Direzione principale, curvatura principale). Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientata con mappa di Gauss $N : S \rightarrow S^2$ e $p \in S$. Un autovettore di dN_p è detto *direzione principale* di S in p e il relativo autovalore cambiato di segno è detto *curvatura principale*.

Se $v \in T_p S$ è una direzione principale con curvatura principale k , abbiamo

$$Q_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle_p = -\langle -kv, v \rangle_p = k,$$

per cui le curvature principali sono curvature normali. In realtà, sono curvature normali piuttosto importanti:

Proposizione 0.5. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientata con mappa di Gauss $N : S \rightarrow S^2$ e $p \in S$. Allora possiamo trovare direzioni principali $v_1, v_2 \in T_p S$ con le relative curvature principali $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, con $k_1 \leq k_2$, tali che:

1. $\{v_1, v_2\}$ è una base ortonormale di $T_p S$;
2. dato un versore $v \in T_p S$ sia $\theta \in (-\pi, \pi]$ una determinazione dell'angolo da v_1 a v , in modo da avere $\cos \theta = \langle v_1, v \rangle_p$ e $\sin \theta = \langle v, v_2 \rangle_p$. Allora

$$Q_p(v) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta;$$

3. k_1 è la minima curvatura normale in p e k_2 è la massima curvatura normale in p .
L'insieme delle possibili curvature normali di S in p è, quindi, l'intervallo $[k_1, k_2]$, cioè

$$\{Q_p(v) \mid v \in T_p S, I_p(v) = 1\} = [k_1, k_2].$$

Dimostrazione. Si consulti il testo [1] pagina 192. □

Definizione 0.33 (Curvatura Gaussiana, curvatura media). Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientata con mappa di Gauss $N : S \rightarrow S^2$. La *curvatura Gaussiana* di S è la funzione $K : S \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$\forall p \in S \quad K(p) = \det(dN_p) = k_1 k_2,$$

mentre la *curvatura media* di S è la funzione $H : S \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$\forall p \in S \quad H(p) = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(dN_p) = \frac{(k_1 + k_2)}{2},$$

dove k_1, k_2 sono le curvature principali di S in p .

Osservazione 0.13. Se cambiamo orientazione su S , la mappa di Gauss N cambia di segno, per cui sia le curvatures principali che la curvatura media cambiano di segno; invece la curvatura Gaussiana K non varia. Quindi possiamo definire la curvatura Gaussiana anche di superfici non orientabili: se p è un punto di una superficie qualsiasi S , la curvatura Gaussiana di S in p è la curvatura Gaussiana in p dell'immagine di una qualsiasi parametrizzazione locale di S centrata in p (confronta con Osservazione 0.9 i)).

Lemma 0.1. Sia $\varphi : U \rightarrow S$ una parametrizzazione locale ortogonale di una superficie S . Allora

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial E}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial G}{\partial x_1} \right) \right\}.$$

Dimostrazione. Si rimanda al testo [1] pagina 204. □

0.2.3 Geodetiche

Le rette nel piano sono ovviamente estremamente importanti per lo studio della geometria del piano; in questo paragrafo vogliamo introdurre l'equivalente su superfici qualsiasi.

Le rette possono essere caratterizzate in due modi: da un punto di vista globale come le curve più brevi congiungenti due punti e da un punto di vista locale come le curve con vettore tangente costante. Per il nostro studio delle superfici converrà usare il punto di vista locale e dedurremo la caratterizzazione globale in seguito, caratterizzazione che risulterà lievemente ma significativamente diversa da quella delle rette nel piano. Dunque vogliamo identificare le curve su una superficie con vettore tangente costante. Questo concetto di costante dev'essere intrinseco alla superficie; se il vettore tangente varia solo nella direzione normale alla superficie S , stando su S questa variazione non è visibile e quindi per i nostri scopi è come se il vettore tangente non variasse affatto.

Per formalizzare questa intuizione iniziamo col definire la classe di oggetti di cui i vettori tangenti a una curva sono un tipico esempio.

Definizione 0.34 (Campo vettoriale). Un *campo vettoriale lungo una curva* $\sigma : I \rightarrow S$ di classe C^∞ è un'applicazione $\xi : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe C^∞ tale che $\xi(t) \in T_{\sigma(t)}S$ per ogni $t \in I$. Più in generale se $\sigma : I \rightarrow S$ una curva di classe C^∞ a tratti, un *campo vettoriale lungo* σ sarà un'applicazione continua $\xi : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\xi(t) \in T_{\sigma(t)}S$ per ogni $t \in I$ e di classe C^∞ in ogni sottointervallo di I in cui σ è di classe C^∞ .

Osservazione 0.14. $\mathcal{T}(\sigma)$ indicherà lo spazio vettoriale dei campi vettoriali lungo σ .

Se ξ è un campo vettoriale lungo una curva σ contenuta in una superficie S , possiamo considerare la sua derivata ξ' in \mathbb{R}^3 . Ma questa derivata non ha significato lungo la superficie; solo la componente tangente a S è visibile dall'interno della superficie. Quindi un concetto geometricamente più significativo di derivata di un campo vettoriale lungo una curva contenuta in una superficie è il seguente:

Definizione 0.35 (Derivata covariante). La *derivata covariante* di un campo vettoriale $\xi \in \mathcal{T}(\sigma)$ lungo una curva $\sigma : I \rightarrow S$ di classe C^∞ in una superficie S è il campo vettoriale $D\xi \in \mathcal{T}(\sigma)$ definito da

$$D\xi(t) = \pi_{\sigma(t)}\left(\frac{d\xi}{dt}(t)\right),$$

dove $\pi_{\sigma(t)} : \mathbb{R}^3 \rightarrow T_{\sigma(t)}S$ è la proiezione ortogonale sul piano tangente a S in $\sigma(t)$.

Osservazione 0.15. La *derivata covariante* è un concetto puramente intrinseco: non dipende dal modo in cui la superficie è immersa in \mathbb{R}^3 , ma dipende solo dalla prima forma fondamentale di S . Infatti:

sia $\varphi : U \rightarrow S$ una parametrizzazione locale la cui immagine contenga il sostegno di una curva $\sigma : I \rightarrow S$. Se ξ è un campo vettoriale lungo σ , possiamo scrivere $\sigma(t) = \varphi(\sigma_1(t), \sigma_2(t))$ e $\xi(t) = \xi_1(t)\partial_1|_{\sigma(t)} + \xi_2(t)\partial_2|_{\sigma(t)}$ per ogni $t \in I$. Allora

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\xi_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \circ \sigma\right) + \frac{d}{dt}\left(\xi_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \circ \sigma\right) = \\ &= \sum_{j=1}^2 \left[\frac{d\xi_j}{dt} \partial_j|_{\sigma} + \xi_j \left(\sigma'_1 \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial x_j} \circ \sigma + \sigma'_2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2 \partial x_j} \circ \sigma \right) \right], \end{aligned}$$

se definiamo i *simboli di Christoffel* Γ_{ij}^h (dipendono solo dalla prima forma fondamentale di S , per cui sono intrinseci) per la parametrizzazione locale φ nel seguente modo:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial x_j} = \Gamma_{ij}^1 \partial_1 + \Gamma_{ij}^2 \partial_2 + h_{ij} N,$$

dove $\Gamma_{ij}^h, h_{ij} \in C^\infty(U)$, il vettore $d\xi/dt$ proiettato sul piano tangente ad S diventa

$$D\xi = \sum_{k=1}^2 \left[\frac{d\xi_k}{dt} + \sum_{i,j=1}^2 (\Gamma_{ij}^k \circ \sigma) \sigma'_i \xi_j \right] \partial_k|_{\sigma}.$$

Questa dipende solo dalla prima forma fondamentale cioè dipende solo dalla struttura metrica della superficie e non dal modo in cui la superficie è immersa in \mathbb{R}^3 .

La seguente definizione formalizza quindi la nostra idea di campo vettoriale costante lungo una curva contenuta in una superficie:

Definizione 0.36 (Campo vettoriale parallelo). Sia $\sigma : I \rightarrow S$ una curva di classe C^∞ in una superficie S . Un campo vettoriale $\xi \in \mathcal{T}(\sigma)$ lungo σ è *parallelo* se $D\xi \equiv 0$.

Osservazione 0.16. Più in generale, se σ è una curva di classe C^∞ a tratti, un campo vettoriale è parallelo se lo è ristretto a tutti i sottointervalli di I dove σ è C^∞ .

Proposizione 0.6. Sia $\sigma : I \rightarrow S$ una curva di classe C^∞ a tratti in una superficie S . Allora:

1. Dato $t_0 \in I$ e $v \in T_{\sigma(t_0)}S$, esiste un unico campo vettoriale $\xi \in \mathcal{T}(\sigma)$ parallelo tale che $\xi(t_0) = v$.
2. Se $\xi, \xi' \in \mathcal{T}(\sigma)$ sono campi vettoriali paralleli lungo σ , il prodotto scalare $\langle \xi, \xi' \rangle_\sigma$ è costante. In particolare la norma di un campo parallelo è costante.

Dimostrazione. Si veda [1] a pagina 252. □

Da questo punto di vista, la generalizzazione del concetto di retta per una superficie qualsiasi è una curva con vettore tangente parallelo:

Definizione 0.37 (Geodetica). Una *geodetica* su una superficie S è una curva $\sigma : I \rightarrow S$ di classe C^∞ tale che $D\sigma' \wedge \sigma' = 0$.

Vogliamo ora introdurre una misura di quanto una curva si discosta dall'essere una geodetica.

Definizione 0.38 (Curvatura geodetica). Sia $\sigma : I \rightarrow S$ una curva parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco su una superficie orientata S e sia $N : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo di versori normali lungo σ . La *curvatura geodetica* di σ è la funzione $\kappa_g : I \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$\kappa_g = \langle D\dot{\sigma}, N \wedge \dot{\sigma} \rangle = \langle \ddot{\sigma}, N \wedge \dot{\sigma} \rangle,$$

in modo che si abbia

$$D\dot{\sigma} = \kappa_g(N \wedge \dot{\sigma}).$$

Corollario 0.1. Sia $\sigma : I \rightarrow S$ una curva parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco su una superficie S . Allora

$$\kappa^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2.$$

In particolare, una curva σ parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco è una geodetica se e solo se la sua curvatura geodetica è identicamente nulla.

Ci servirà una formula più esplicita per il calcolo della curvatura geodetica. Per ottenerla cominciamo con il

Lemma 0.2. Sia $\varphi : U \rightarrow S$ una parametrizzazione locale ortogonale di una superficie S e poniamo $X_j = \partial_j / \|\partial_j\|$ per $j = 1, 2$. Sia $\sigma : I \rightarrow \varphi(U) \subseteq S$ una curva regolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco e scriviamo $\sigma(s) = \varphi(\sigma_1(s), \sigma_2(s))$ e $\xi_j = X_j \circ \sigma \in \mathcal{T}(\sigma)$. Allora

$$\langle D\xi_1, \xi_2 \rangle = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[\dot{\sigma}_2 \frac{\partial G}{\partial x_1} - \dot{\sigma}_1 \frac{\partial E}{\partial x_2} \right].$$

Ci serve anche un'altra definizione. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientata da una mappa di Gauss $N : S \rightarrow S^2$ e sia $\sigma : [a, b] \rightarrow S$ una curva parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco. Supponiamo di avere due campi vettoriali $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{T}(\sigma)$ lungo σ mai nulli in modo che $\{\xi_1(s), N(\sigma(s)) \wedge \xi_1(s)\}$ sia una base ortogonale positiva di $T_{\sigma(s)}S$ per ogni $s \in [a, b]$ e possiamo scrivere

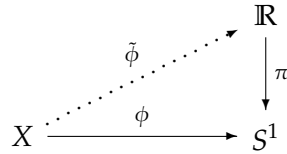
$$\frac{\xi_2}{\|\xi_2\|} = \frac{\langle \xi_1, \xi_2 \rangle}{\|\xi_1\| \|\xi_2\|} \frac{\xi_1}{\|\xi_1\|} + \frac{\langle (N \circ \sigma) \wedge \xi_1, \xi_2 \rangle}{\|\xi_1\| \|\xi_2\|} \frac{(N \circ \sigma \wedge \xi_1)}{\|\xi_1\|}.$$

Allora possiamo definire un'applicazione continua $\phi : [a, b] \rightarrow S^1$ ponendo

$$\phi = \left(\frac{\langle \xi_1, \xi_2 \rangle}{\|\xi_1\| \|\xi_2\|}, \frac{\langle (N \circ \sigma) \wedge \xi_1, \xi_2 \rangle}{\|\xi_1\| \|\xi_2\|} \right). \quad (\star)$$

Si noti che $\phi(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$ dove $\theta(s)$ è l'angolo tra $\xi_1(s)$ e $\xi_2(s)$. Ricordando che:

Definizione 0.39 (Sollevamento). Siano $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ data da $\pi(x) = (\cos x, \sin x)$ e sia $\phi : X \rightarrow S^1$ un'applicazione continua da uno spazio topologico X a valori in S^1 . Un *sollevamento* di ϕ è un'applicazione continua $\tilde{\phi} : X \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\pi \circ \tilde{\phi} = \phi$.



Proposizione 0.7. Sia $\phi : [a, b] \rightarrow S^1$ una curva continua e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $\pi(x_0) = \phi(a)$. Allora esiste un unico sollevamento $\tilde{\phi} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ di ϕ per cui si abbia $\tilde{\phi}(a) = x_0$.

Dimostrazione. Si consulti il testo [1] pagina 67. □

In termini di angoli avere un sollevamento $\tilde{\phi}$ dell'applicazione continua $\phi : [a, b] \rightarrow S^1$, come (\star) , significa associare in modo continuo a ogni $s \in [a, b]$ una determinazione dell'angolo tra $\xi_1(s)$ e $\xi_2(s)$; quindi a volte chiameremo *determinazione continua dell'angolo* un sollevamento di ϕ .

Definizione 0.40 (Determinazione continua). Una *determinazione continua dell'angolo* da ξ_1 a ξ_2 è un qualsiasi sollevamento $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ della $\phi(\star)$.

Concludiamo con la seguente:

Proposizione 0.8. Sia $\varphi : U \rightarrow S$ una parametrizzazione locale ortogonale di una superficie S e $\sigma : I \rightarrow \varphi(U) \subseteq S$ una curva parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco. Scriviamo $\sigma(s) = \varphi(\sigma_1(s), \sigma_2(s))$; allora la curvatura geodetica di σ è data da

$$\kappa_g = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[\dot{\sigma}_2 \frac{\partial G}{\partial x_1} - \dot{\sigma}_1 \frac{\partial E}{\partial x_2} \right] + \frac{d\theta}{ds},$$

dove $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ è una determinazione continua dell'angolo da $\partial_1|_\sigma$ a $\dot{\sigma}$.

Dimostrazione. Si guardi [1] pagina 262. □

L'ultimo richiamo di cui avremo bisogno è la definizione di palla geodetica:

Proposizione 0.9. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie. Allora per ogni $p \in S$ e $v \in T_p S$ esiste una geodetica $\sigma : I \rightarrow S$ tale che $0 \in I$, $\sigma(0) = p$ e $\sigma'(0) = v$. Inoltre se $\tilde{\sigma} : \tilde{I} \rightarrow S$ è un'altra geodetica soddisfacente le stesse condizioni allora σ e $\tilde{\sigma}$ coincidono in $I \cap \tilde{I}$. In particolare, per ogni $p \in S$ e $v \in T_p S$ esiste un intervallo aperto massimale $I_v \subseteq \mathbb{R}$ e un'unica geodetica $\sigma_v : I_v \rightarrow S$ tale che $\sigma_v(0) = p$ e $\sigma_v'(0) = v$.

Dimostrazione. Per la dimostrazione si rimanda al testo [1] pagina 254. □

Definizione 0.41 (Mappa esponenziale). Sia S una superficie e $p \in S$. L'insieme dei vettori tangenti

$$\varepsilon_p = \{v \in T_p S : 1 \in I_v \subseteq \mathbb{R} \text{ intervallo aperto massimale}\}$$

tali che l'unica geodetica $\sigma_v : I_v \rightarrow S$, con $\sigma_v(0) = p$ e $\sigma_v'(0) = v$, è definita in un intorno di $[0, 1]$. Allora la *mappa esponenziale* $\exp_p : \varepsilon_p \rightarrow S$ di S in p è definita da $\exp_p(v) = \sigma_v(1)$.

La mappa esponenziale ha buone proprietà:

Proposizione 0.10. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie e $p \in S$. Allora:

1. ε_p è un intorno aperto stellato dell'origine in $T_p S$;
2. per ogni $v \in T_p S$ e $t_0 \in \mathbb{R}$ tali che σ_v sia definita in t_0 esistono $\delta > 0$ e una parametrizzazione locale $\varphi : U \rightarrow S$ centrata in p tali che, posto $w_0 = (d\varphi_O)^{-1}(v)$, l'applicazione $(x, w, t) \mapsto \sigma_{d\varphi_x(w)}(t)$ sia definita e di classe C^∞ su $U \times B(w_0, \delta) \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^5$;
3. l'applicazione $\exp_p : \varepsilon_p \rightarrow S$ è di classe C^∞ ;

4. $d(\exp_p)_0 = id$ e, in particolare, \exp_p è un diffeomorfismo di un intorno di 0 in $T_p S$ con un intorno di p in S .

Dimostrazione. La dimostrazione si rimanda al testo [1] pagina 264. \square

Definizione 0.42 (Palla geodetica). Se $p \in S$ e $\delta > 0$ sia $B_p(0, \delta) = \{v \in T_p S : \|v\|_p < \delta\}$ la palla di centro l'origine e raggio $\delta > 0$ nel piano tangente a p . Il raggio d'iniettività in $rad(p)$ di S in p è il più grande $\delta > 0$ tale che $\exp_p : B_p(0, \delta) \rightarrow S$ sia un diffeomorfismo con l'immagine. Se $0 < \delta < inj\ rad(p)$, chiameremo l'insieme $B_\delta(p) = \exp_p(B_p(0, \delta))$ palla geodetica di centro p e raggio δ . Le geodetiche uscenti da p , cioè le curve della forma $t \mapsto \exp_p(tv)$, sono dette *geodetiche radiali*.

Capitolo 1

Il teorema di Gauss-Bonnet locale

1.1 Indice di rotazione di poligoni curvilinei su superfici

Iniziamo introducendo il concetto di angolo esterno e di indice di rotazione per poligoni curvilinei su superficie. Ci saranno, infatti, molto utili per enunciare la versione locale del *teorema di Gauss-Bonnet*.

Definizione 1.1 (Cuspide e angolo esterno di una curva, poligono curvilineo). Sia $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva piana C^1 regolare a tratti, e scegliamo una partizione $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ di $[a, b]$ tale che $\sigma|_{[t_{j-1}, t_j]}$ sia regolare per $j = 1, \dots, k$. Poniamo

$$\sigma'(t_j^-) = \lim_{t \rightarrow t_j^-} \sigma'(t)$$

per $j = 1, \dots, k$, e

$$\sigma'(t_j^+) = \lim_{t \rightarrow t_j^+} \sigma'(t)$$

per $j = 0, \dots, k-1$. Inoltre, se σ è chiusa poniamo anche $\sigma'(t_0^-) = \sigma'(t_k^-)$ e $\sigma'(t_k^+) = \sigma'(t_0^+)$; a priori, $\sigma'(t_k^-) \neq \sigma'(t_0^+)$. Diremo che t_j è una *cuspid*e per σ se $\sigma'(t_j^-) = -\sigma'(t_j^+)$. Se t_j non è una cuspid>e, l'*angolo esterno* $\varepsilon_j \in (-\pi, \pi)$ è l'angolo tra $\sigma'(t_j^-)$ e $\sigma'(t_j^+)$ (preso col segno positivo se $\{\sigma'(t_j^-), \sigma'(t_j^+)\}$ è una base positiva di \mathbb{R}^2 , negativo altrimenti). I punti in cui l'angolo esterno è diverso da zero saranno detti *vertici* della curva. Infine, un *poligono curvilineo* di classe C^k è una curva C^k regolare a tratti semplice chiusa priva di cuspidi.

Definizione 1.2 (Angolo esterno di un poligono curvilineo). Sia $\sigma : [a, b] \rightarrow S$ un poligono curvilineo in una superficie S , con sostegno contenuto nell'immagine di una parametrizzazione locale $\varphi : U \rightarrow S$. Scegliamo una partizione $a = s_0 < s_1 < \dots < s_k = b$ di $[a, b]$ tale che $\sigma|_{[s_{j-1}, s_j]}$ sia regolare per

1.1. INDICE DI ROTAZIONE DI POLIGONI CURVILINEI SU SUPERFICI

$j = 1, \dots, k$. L'angolo esterno di σ in s_j è l'angolo $\varepsilon \in (-\pi, \pi)$ da $\dot{\sigma}(s_j^-)$ a $\dot{\sigma}(s_j^+)$, preso col segno positivo se $\{\dot{\sigma}(s_j^-), \dot{\sigma}(s_j^+)\}$ è una base positiva di $T_{\sigma(s_j)}S$, col segno negativo altrimenti.

Osservazione 1.1.

- i) Notiamo che stiamo mettendo su $T_{\sigma(s_j)}S$ l'orientazione indotta da φ .
- ii) L'angolo esterno è ben definito poiché σ è priva di cuspidi.

Definizione 1.3 (Angolo e indice di rotazione di poligoni curvilinei). Sia $\sigma : [a, b] \rightarrow S$ un poligono curvilineo in una superficie S . Definiamo la funzione *angolo di rotazione* $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nel seguente modo: sia $\theta : [a, s_1) \rightarrow \mathbb{R}$ la determinazione continua dell'angolo da $\partial_1|_\sigma$ a $\dot{\sigma}$, scelta in modo che $\theta(a) \in (-\pi, \pi]$. Poniamo poi

$$\theta(s_1) = \lim_{s \rightarrow s_1^-} \theta(s) + \varepsilon_1,$$

dove ε_1 è l'angolo esterno in s_1 (Figura 1.1). Definiamo poi $\theta : [s_1, s_2) \rightarrow \mathbb{R}$ come la determinazione dell'angolo da $\partial_1|_\sigma$ a $\dot{\sigma}$ con valore iniziale $\theta(s_1)$, e poniamo

$$\theta(s_2) = \lim_{s \rightarrow s_2^-} \theta(s) + \varepsilon_2.$$

Così facendo definiamo θ su tutto l'intervallo $[a, b]$ in modo che risulti continua da destra, e finiamo ponendo

$$\theta(b) = \lim_{s \rightarrow b^-} \theta(s) + \varepsilon_k,$$

dove ε_k è l'angolo esterno in $b = s_k$. Allora l'indice di rotazione $\rho(\sigma)$ del poligono curvilineo σ è il numero

$$\rho(\sigma) = \frac{1}{2\pi}(\theta(b) - \theta(a)).$$

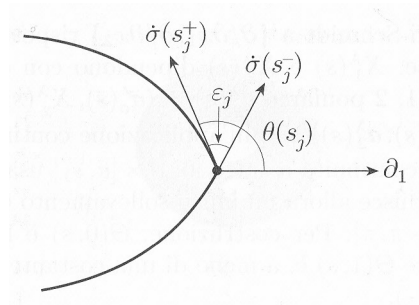


Figura 1.1:

Osservazione 1.2.

- i) Notiamo che, per costruzione, $\theta(s_1)$ è una determinazione dell'angolo tra $\partial_1|_{\sigma(s_1)}$ e $\dot{\sigma}(s_1^+)$, mentre $\lim_{s \rightarrow s_1^-} \theta(s)$ è una determinazione dell'angolo tra $\partial_1|_{\sigma(s_1)}$ e $\dot{\sigma}(s_1^-)$.
- ii) Ovviamente $\theta(b)$ è una determinazione dell'angolo tra $\partial_1|_{\sigma(b)}$ e $\dot{\sigma}(s_k^+)$.
- iii) L'indice di rotazione è un numero intero poichè $\dot{\sigma}(s_k^+) = \dot{\sigma}(s_0^+)$.
- iv) Se scegliessimo una diversa determinazione $\theta(a)$ dell'angolo da $\partial_1|_{\sigma(a)}$ a $\dot{\sigma}(a)$ essa modificherebbe di una costante additiva l'angolo di rotazione, ma non l'indice di rotazione.

Viene naturale confrontare l'indice di rotazione così definito con quello della curva $\sigma_0 = \varphi^{-1} \circ \sigma$ nel piano. Non è difficile verificare che coincidono:

Proposizione 1.1. *Sia $\sigma : [a, b] \rightarrow S$ un poligono curvilineo contenuto nell'immagine di una parametrizzazione locale $\varphi : U \rightarrow S$ di una superficie S , e poniamo $\sigma_0 = \varphi^{-1} \circ \sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Allora l'indice di rotazione di σ coincide con quello di σ_0 . In particolare $\rho(\sigma) = \pm 1$.*

Dimostrazione. Calcoliamo l'angolo di rotazione per σ_0 come l'angolo tra la direzione costante $\partial/\partial x_1$ e il vettore tangente σ'_0 usando il prodotto scalare canonico $\langle \cdot, \cdot \rangle^0$ di \mathbb{R}^2 . Invece, l'angolo di rotazione per σ è ottenuto calcolando l'angolo tra la direzione variabile $\partial_1|_{\sigma(s)} = d\varphi_{\sigma_0(s)}(\partial/\partial x_1)$ e il versore tangente $\dot{\sigma}(s) = d\varphi_{\sigma_0(s)}(\dot{\sigma}_0(s))$ usando il prodotto scalare in $T_{\sigma(s)}S$ dato dalla prima forma fondamentale. Il discorso è analogo per il calcolo degli angoli esterni. Allora possiamo ottenere l'angolo di rotazione e gli angoli esterni di σ usando $\partial/\partial x_1$ e i vettori tangenti di σ_0 usando il prodotto scalare canonico di \mathbb{R}^2 per calcolare l'angolo tra i vettori applicati nel punto $\sigma_0(s)$:

$$\forall v, w \in \mathbb{R}^2 \quad \langle v, w \rangle_s^1 := \langle d\varphi_{\sigma_0(s)}(v), d\varphi_{\sigma_0(s)}(w) \rangle_{\sigma(s)}.$$

Ma allora, usando più in generale il seguente prodotto scalare su \mathbb{R}^2

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_s^\lambda := (1 - \lambda)\langle \cdot, \cdot \rangle^0 + \lambda\langle \cdot, \cdot \rangle_s^1$$

al variare di $\lambda \in [0, 1]$, possiamo misurare gli angoli di rotazioni ed esterni nel punto $\sigma_0(s)$. Otterremo, $\forall \lambda \in [0, 1]$ un indice di rotazione $\rho^\lambda(\sigma)$, che dovrebbe dipendere con continuità da λ . D'altra parte $\rho^\lambda(\sigma)$ è sempre un intero, poichè $\dot{\sigma}_0(b^+) = \dot{\sigma}_0(a^+)$; allora $\rho^\lambda(\sigma)$ dovrebbe essere costante. Verifichiamolo: dati $s \in [a, b]$ e $\lambda \in [0, 1]$, sia $\{X_1^\lambda, X_2^\lambda\}$ la base di \mathbb{R}^2 (ottenuta applicando il processo ortonormale di Gram-Schmidt a $\{\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2\}$ rispetto al prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_s^\lambda$) dove $X_1^\lambda(s)$ e $X_2^\lambda(s)$ dipendono con continuità da

λ e s . Per $s \in [a, s_1)$ e $j = 1, 2$ poniamo

$$a_j^\lambda = \frac{\langle \sigma'_0(s), X_j^\lambda(s) \rangle_s^\lambda}{\| \sigma'_0(s) \|_s^\lambda},$$

così che $\alpha(\lambda, s) = (a_1^\lambda(s), a_2^\lambda(s))$ sia un'applicazione continua da $[0, 1] \times [a, s_1)$ a S^1 e, usando $\sigma'_0(s_1^-)$, essa è estendibile a tutto $[0, 1] \times [a, s_1]$. Allora esiste un unico sollevamento $\Theta : [0, 1] \times [a, s_1] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\Theta(0, a) \in (-\pi, \pi]$. Per costruzione $\Theta(0, s)$ è l'angolo di rotazione di σ_0 in $[a, s_1)$, mentre $\Theta(1, s)$ è l'angolo di rotazione di σ in $[a, s_1)$ a meno di una costante additiva.

In maniera analoga, possiamo definire una funzione continua $\varepsilon_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\varepsilon_1(\lambda)$ sia una determinazione dell'angolo da $\sigma'_0(s_1^-)$ a $\sigma'_0(s_1^+)$ misurato con il prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_{s_1}^\lambda$. Allora, usando come valore iniziale $\Theta(0, s_1) + \varepsilon_1(0)$, possiamo definire Θ su $[0, 1] \times [s_1, s_2)$. In questo modo otteniamo un'applicazione $\Theta : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ con $\Theta(\cdot, s)$ continua in λ per ogni $s \in [a, b]$, allora

$$\rho^\lambda(\sigma) = \frac{\Theta(\lambda, b) - \Theta(\lambda, a)}{2\pi}$$

è continua in λ .

Abbiamo osservato prima che $\rho^\lambda(\sigma)$ è a valori interi e quindi costante: allora $\rho^0(\sigma) = \rho^1(\sigma)$.

L'ultima affermazione dell'enunciato segue dal *teorema delle tangenti di Hopf*, per la dimostrazione si veda [1] a pagina 86. \square

Definizione 1.4 (Poligono curvilineo orientato positivamente). Diremo che un poligono curvilineo $\sigma : [a, b] \rightarrow S$ contenuto nell'immagine di una parametrizzazione locale $\varphi : U \rightarrow S$ di una superficie S è *orientato positivamente* (rispetto a φ) se ha indice di rotazione $+1$.

1.2 Il teorema di Gauss-Bonnet locale

La versione locale del *teorema di Gauss-Bonnet* è un enunciato riguardante regioni regolari particolari contenute nell'immagine di una parametrizzazione locale ortogonale. Introduciamo quindi gli insiemi su cui potremo dimostrare il *teorema di Gauss-Bonnet*.

Definizione 1.5 (Regione regolare). Una *regione regolare* $R \subseteq S$ di una superficie S è un sottoinsieme compatto connesso di S ottenuto come chiusura del suo interno e con bordo parametrizzato da un numero finito di poligoni curvilinei con sostegno disgiunto.

Se S è compatta, allora $R = S$ è una regione regolare di S con bordo vuoto.

Definizione 1.6 (Regione regolare semplice). Una regione regolare $R \subseteq S$ di una superficie S è detta *semplice* se è omeomorfa ad un disco chiuso (per cui in particolare il bordo è costituito da un solo poligono curvilineo).

1.2. IL TEOREMA DI GAUSS-BONNET LOCALE

Dando la definizione di integrale su una superficie regolare contenuta nell'immagine di una parametrizzazione locale e l'enunciato del teorema di Gauss-Green possiamo dimostrare la versione locale del *teorema di Gauss-Bonnet*.

Definizione 1.7 (Integrale di f su R). Sia $R \subseteq S$ una regione regolare di una superficie S contenuta nell'immagine di una parametrizzazione locale $\varphi : U \rightarrow S$. Allora per ogni $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ continua, diremo *integrale di f su R* il numero

$$\int_R f \, dv = \int_{\varphi^{-1}(R)} (f \circ \varphi) \sqrt{EG - F^2} \, dx_1 dx_2.$$

Teorema 1.1 (Teorema di Gauss-Green). Sia $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva di Jordan di classe C^2 a tratti regolare orientata positivamente e indichiamo con $D \subset \mathbb{R}^2$ l'interno di σ . Allora per ogni coppia di funzioni $f_1, f_2 \in C^1(\bar{D})$ definite e di classe C^1 in un intorno di D si ha

$$\int_a^b [f_1(\sigma(t))\sigma_1'(t) + f_2(\sigma(t))\sigma_2'(t)] dt = \int_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2.$$

Dimostrazione. Ricordiamo che il dominio D regolare è, per definizione, l'unione di un numero finito di domini normali (rispetto a x_1 o a x_2) regolari D_1, D_2, \dots, D_N , a due a due privi di punti interni in comune. Inoltre, se D è un dominio regolare, la sua frontiera ∂D , cioè la curva di Jordan regolare a tratti, ammette versore tangente in tutti i suoi punti, tranne al più un numero finito.

La formula data nell'enunciato del teorema è la somma di

$$\int_a^b f_2(\sigma(t))\sigma_2'(t) dt = \int_D \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 dx_2$$

e

$$\int_a^b f_1(\sigma(t))\sigma_1'(t) dt = \int_D -\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2.$$

Ci basta provare la prima, la seconda si ottiene analogamente.

Cominciamo dal caso in cui D sia un dominio normale rispetto a x_2 della forma:

$$D := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times [c, d] : \alpha(x_2) \leq x_1 \leq \beta(x_2)\},$$

possiamo, allora, calcolare l'integrale della prima relazione:

$$\begin{aligned} \int_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right) dx_1 dx_2 &= \int_c^d \int_{\alpha(x_2)}^{\beta(x_2)} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right) dx_1 dx_2 = \\ &= \int_c^d [f_2(\alpha(x_2), x_2) - f_2(\beta(x_2), x_2)] dx_2. \end{aligned}$$

1.2. IL TEOREMA DI GAUSS-BONNET LOCALE

Spezziamo ora ∂D che sarà unione di quattro curve:

1. γ_1 ha come equazioni parametriche $x_2 = x_2, x_1 = \alpha(x_2), c \leq x_2 \leq d$
2. γ_2 ha come equazioni parametriche $x_1 = x_1, x_2 = c, \alpha(c) \leq x_1 \leq \beta(c)$
3. γ_3 ha come equazioni parametriche $x_2 = x_2, x_1 = \beta(x_2), c \leq x_2 \leq d$
4. γ_4 ha come equazioni parametriche $x_1 = x_1, x_2 = d, \alpha(d) \leq x_1 \leq \beta(d)$

Otteniamo quindi:

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} f_2(\sigma(t))\sigma'_2(t)dt &= \int_{\gamma_1} f_2(\sigma(t))\sigma'_2(t)dt + \int_{\gamma_3} f_2(\sigma(t))\sigma'_2(t)dt = \\ &= \int_c^d [f_2(\alpha(x_2), x_2) - f_2(\beta(x_2), x_2)]dx_2 \end{aligned}$$

poichè l'integrale lungo γ_2 e l'integrale lungo γ_4 sono nulli.

Il discorso è analogo se D è un dominio normale rispetto a x_1 .

Infine, sia D un dominio regolare, cioè, ripetiamo, l'unione di un numero finito di domini normali regolari D_1, \dots, D_N , a due a due privi di punti interni in comune (si veda, ad esempio, la *Figura 1.2*).

Osservando che ogni dominio D_i , oltre a essere normale, è anche regolare,

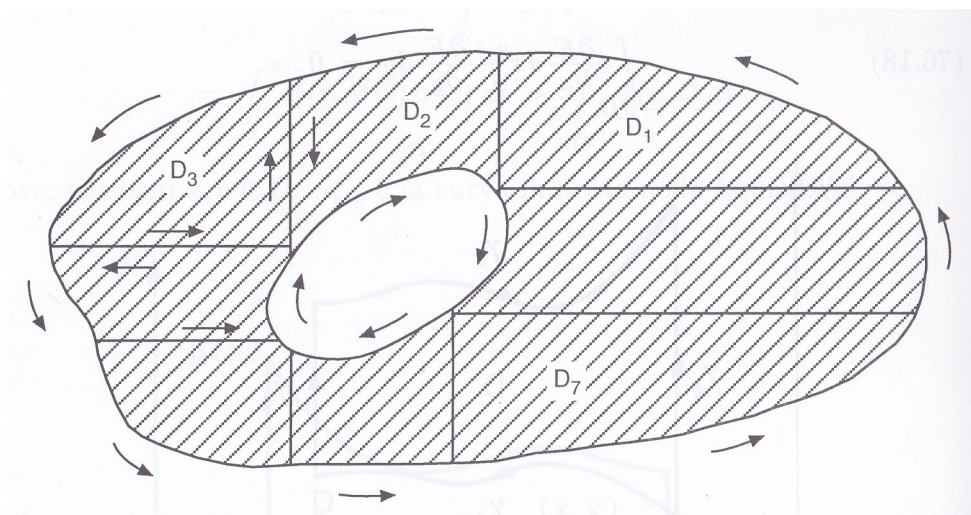


Figura 1.2: dominio regolare

otteniamo

$$\int_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right) dx_1 dx_2 = \sum_{i=1}^N \int_{D_i} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right) dx_1 dx_2 =$$

1.2. IL TEOREMA DI GAUSS-BONNET LOCALE

$$= \sum_{i=1}^N \int_{\partial D_i} f_2(\sigma(t)) \sigma_2'(t) dt = \int_a^b f_2(\sigma(t)) \sigma_2'(t) dt.$$

L'ultima uguaglianza segue dal fatto che gli archi di curva contenuti nella frontiera di due domini adiacenti compaiono due volte nella somma, ma con orientazione opposta, quindi essi si elidono a vicenda. \square

Teorema 1.2 (Teorema di Gauss-Bonnet locale). *Sia $R \subset S$ una regione regolare semplice contenuta nell'immagine di una parametrizzazione locale ortogonale $\varphi : U \rightarrow S$. Indichiamo con $\sigma : [a, b] \rightarrow S$ una parametrizzazione rispetto alla lunghezza d'arco del bordo di R , orientata positivamente rispetto a φ , di angoli esterni $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k \in (-\pi, \pi)$. Infine orientiamo $\varphi(U)$ scegliendo $N = \partial_1 \wedge \partial_2 / \|\partial_1 \wedge \partial_2\|$ come campo di versori normali. Allora*

$$\int_R K dv + \int_a^b \kappa_g ds + \sum_{j=1}^k \varepsilon_j = 2\pi,$$

dove κ_g è la curvatura geodetica di σ e K è la curvatura Gaussiana di S .

Dimostrazione. Sappiamo che nei punti in cui σ è regolare, per la *Proposizione 0.8*, abbiamo

$$\kappa_g = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[\dot{\sigma}_2 \frac{\partial G}{\partial x_1} - \dot{\sigma}_1 \frac{\partial E}{\partial x_2} \right] + \frac{d\theta}{ds},$$

dove $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è l'angolo di rotazione di σ . Se $a = s_0 < \dots < s_k = b$ è una partizione di $[a, b]$ tale che $\sigma|_{[s_{j-1}, s_j]}$ sia regolare per $j = 1, \dots, k$, per il teorema di Gauss-Green otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_a^b \kappa_g ds &= \sum_{j=1}^k \int_{s_{j-1}}^{s_j} \kappa_g(s) ds = \\ &= \int_a^b \left[\frac{1}{2\sqrt{EG}} \frac{\partial G}{\partial x_1} \dot{\sigma}_2 - \frac{1}{2\sqrt{EG}} \frac{\partial E}{\partial x_2} \dot{\sigma}_1 \right] + \sum_{j=1}^k [\theta(s_j) - \theta(s_{j-1}) - \varepsilon_j] = \\ &= \int_{\varphi^{-1}(R)} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{2\sqrt{EG}} \frac{\partial G}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{2\sqrt{EG}} \frac{\partial E}{\partial x_2} \right) \right] dx_1 dx_2 + 2\pi\rho(\sigma) - \sum_{j=1}^k \varepsilon_j, \end{aligned}$$

dove $\rho(\sigma)$ è l'indice di rotazione di σ . Ma $\rho(\sigma) = 1$ poichè σ è orientato positivamente rispetto a φ ; allora dalla definizione di integrale su R (*Definizione 1.7*), dove $F = 0$ poichè la parametrizzazione locale è ortogonale, e dalla formula di K (*Lemma 0.1*) otteniamo:

$$\int_a^b \kappa_g ds = - \int_{\varphi^{-1}(R)} K \sqrt{EG} dx_1 dx_2 + 2\pi - \sum_{j=1}^k \varepsilon_j = - \int_R K dv + 2\pi - \sum_{j=1}^k \varepsilon_j.$$

1.2. IL TEOREMA DI GAUSS-BONNET LOCALE

□

Osservazione 1.3. Ogni modifica di uno dei tre elementi che compongono il *teorema di Gauss-Bonnet* (curvatura Gaussiana, curvatura geodetica del bordo e angoli esterni) si ripercuote necessariamente sugli altri in modo da mantenere il totale costante.

Capitolo 2

Triangolazioni

2.1 Definizione

L'idea chiave per la dimostrazione del *teorema di Gauss-Bonnet* in versione globale è quella di cercare di formalizzare un procedimento di suddivisione di una regione regolare di una superficie S in pezzi più piccoli, così da applicare la versione locale su ognuno di essi, e poi sommare il risultato così ottenuto. Definiamo quindi le triangolazioni di regioni regolari particolari.

Definizione 2.1 (Regione regolare semplice). Una regione regolare $R \subseteq S$ di una superficie S è detta *semplice* se è omeomorfa a un disco chiuso.

Definizione 2.2 (Triangolo liscio, vertici e lati). Un *triangolo liscio* in una superficie è una regione regolare semplice T in cui siano stati evidenziati tre punti di bordo, detti *vertici* del triangolo, in modo da trasformare il bordo ∂T di T in un poligono curvilineo. I vertici dividono il bordo del triangolo in tre parti, dette *lati*.

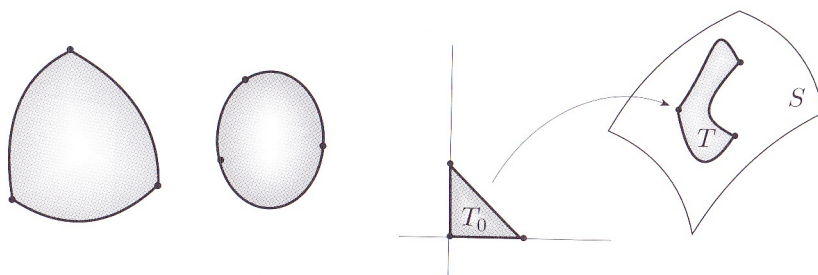


Figura 2.1: a sinistra un esempio di triangolo a destra di 2-simplesso

2.1. DEFINIZIONE

Definizione 2.3 (2-simplesso, vertici e lati). Un 2-simplesso in uno spazio topologico X è un sottoinsieme di X omeomorfo al triangolo standard

$$T_0 = \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 \mid t_1, t_2 \geq 0, t_1 + t_2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2.$$

I vertici di un 2-simplesso T sono i punti corrispondenti ai vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ del triangolo standard, i lati di T sono i sottoinsiemi corrispondenti ai lati di T_0 , e l'interno è formato dai punti corrispondenti all'interno di T_0 in \mathbb{R}^2 .

Definizione 2.4 (Triangolazione). Sia $R \subseteq S$ una regione regolare. Una triangolazione (regolare) di R è una famiglia finita $\mathbf{T} = \{T_1, \dots, T_r\}$ di triangoli (detti facce della triangolazione) tali che

- $R = \bigcup_{j=1}^r T_j$;
- l'intersezione di due facce distinte o è vuota o è un singolo vertice, o è un lato intero;
- l'intersezione di una faccia con il bordo di R se non è vuota consiste di vertici o lati interi;
- ogni vertice del bordo di R è vertice di almeno una faccia della triangolazione.

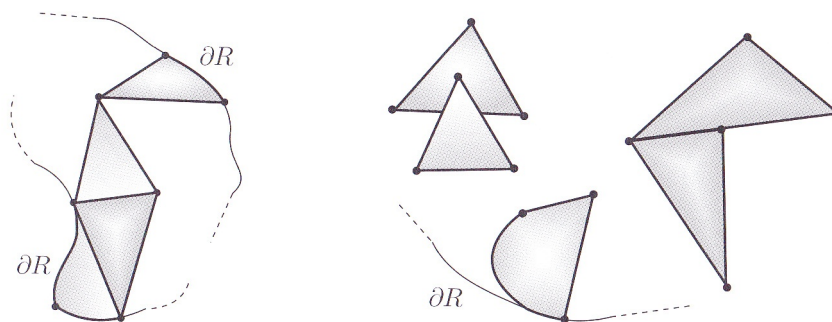


Figura 2.2: intersezioni permesse a sinistra e vietate a destra

Osservazione 2.1.

- In altre parole, gli interni delle facce di una triangolazione sono sempre a due a due disgiunti e due facce (o una faccia e il bordo di una regione) non possono intersecarsi in un tratto di lato senza contenere entrambe il lato intero (Figura 2.2).
- Se S è compatta possiamo anche considerare il caso $R = S$.

2.1. DEFINIZIONE

- iii) Indicheremo con $v(\mathbf{T})$ il numero di vertici totale dei triangoli di \mathbf{T} , con $l(\mathbf{T})$ il numero dei lati totale dei lati dei triangoli di \mathbf{T} , e con $f(\mathbf{T}) = r$ il numero di facce di \mathbf{T} .
- iv) Se, invece dei triangoli lisci, usiamo i 2-simplexsi definiamo quella che viene chiamata *triangolazione topologica* di R .
- v) Possiamo affermare che: *ogni lato di una triangolazione topologica di una regione regolare R appartiene a esattamente una faccia della triangolazione se è contenuto in ∂R , ed esattamente a due facce della triangolazione altrimenti.* Infatti se un lato di una triangolazione topologica \mathbf{T} di una regione regolare $R \subseteq S$ è contenuto in una sola faccia di R , allora dev'essere per forza un sottoinsieme del bordo di R . D'altra parte, nessun lato di \mathbf{T} può essere contenuto in tre facce distinte. Supponiamo, infatti, per assurdo che il lato l sia contenuto nelle tre facce T_1, T_2 e T_3 . Siano $p_1, p_2 \in l$ due punti tali che l'intero segmento l_0 di l da p_1 a p_2 sia contenuto nell'immagine di una parametrizzazione locale $\varphi : U \rightarrow S$. Allora possiamo collegare p_1 con p_2 sia con una curva semplice continua contenuta nell'intersezione tra $\varphi(U)$ e l'interno di T_1 sia con una curva semplice continua contenuta nell'intersezione tra $\varphi(U)$ e l'interno di T_2 ; otteniamo quindi una curva continua semplice chiusa in $\varphi(U)$ il cui sostegno interseca l solo in p_1 e p_2 .

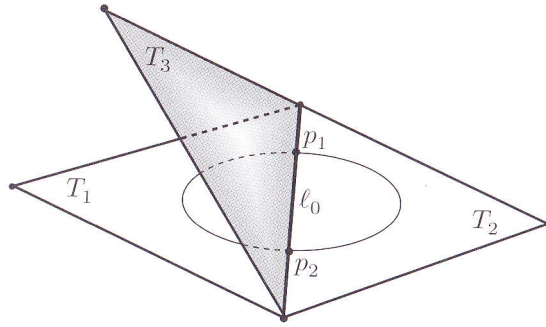


Figura 2.3:

Applicando φ^{-1} troviamo una curva di Jordan in U il cui sostegno C interseca $\varphi^{-1}(l)$ solo in $\varphi^{-1}(p_1)$ e $\varphi^{-1}(p_2)$ e il cui interno è un intorno di $\varphi^{-1}(l_0)$, estremi esclusi, contenuto in $\varphi^{-1}(T_1 \cup T_2)$. Ma allora $\varphi^{-1}(T_3)$ dovrebbe essere contenuto nella componente illimitata $\mathbb{R}^2 \setminus C$, mentre è aderente a l_0 , assurdo.

2.2 Esistenza di triangolazioni

Per poter sfruttare le triangolazioni dobbiamo accertarci che esistano.

Diamo quindi un paio di definizioni preliminari e, in seguito, enunciati e dimostrazioni dei principali teoremi d'esistenza.

In tutto questo paragrafo col termine triangolazione intenderemo sempre una triangolazione topologica.

Definizione 2.5 (Arco di Jordan). Un *arco (curva) di Jordan* in una superficie S è il sostegno C di una curva continua $\sigma : [a, b] \rightarrow S$ semplice non chiusa (chiusa). Se inoltre σ è una curva regolare, diremo che C è un arco di Jordan regolare; se poi σ è una geodetica, diremo che C è un *arco geodetico*.

Definizione 2.6 (Regione topologica e regione topologica semplice). Una *regione topologica* in una superficie S è un sottoinsieme $R \subseteq S$ compatto ottenuto come chiusura della sua parte interna e il cui bordo è composto da un numero finito di curve di Jordan disgiunte. Una *regione topologica semplice* è una regione topologica omeomorfa a un disco chiuso.

Definizione 2.7 (Taglio). Sia $R \subset S$ una regione topologica semplice di una superficie S . Un *taglio* di R è un arco di Jordan $C \subset R$ che interseca ∂R solo negli estremi.

La dimostrazione dell'esistenza delle triangolazioni si baserà su due lemmi fondamentali.

Lemma 2.1. *Sia $R \subset S$ una regione topologica regolare semplice e $C \subset R$ un taglio regolare. Allora $R \setminus C$ ha esattamente due componenti connesse che sono regioni topologiche regolari semplici con bordo costituito da C e da un arco del bordo di R .*

Dimostrazione. Possiamo assumere che R sia il disco unitario nel piano poichè il problema è un problema di tipo topologico.

Siano $p_1, p_2 \in \partial R$ i due punti di intersezione di C con ∂R e indichiamo con C_1, C_2 i due archi di circonferenza tagliati da p_1 e p_2 sul bordo di R . Allora $C \cup C_j$ è il sostegno di una curva di Jordan e quindi divide il piano in due componenti connesse: una limitata Ω_1 e l'altra illimitata. La componente connessa illimitata di $\mathbb{R}^2 \setminus \partial R$ è contenuta nella componente connessa illimitata di $\mathbb{R}^2 \setminus (C \cup C_j)$ poichè la interseca; allora Ω_j è contenuta nel disco unitario e ha bordo $(C \cup C_j)$.

Ω_1 e Ω_2 hanno bordi distinti quindi $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$; ci basta ora dimostrare che $R \setminus C$ non ha altre componenti connesse. Infatti, identificando il bordo di R a un punto, otteniamo uno spazio topologico X omeomorfo ad una sfera. Il taglio C in X è quindi diventato una curva di Jordan in X ; quindi $X \setminus C$ deve avere due componenti connesse che devono essere Ω_1 e Ω_2 . \square

Prima di dare enunciato e dimostrazione del secondo lemma, che ci permetterà di costruire i lati delle triangolazioni, è utile dare la seguente definizione:

Definizione 2.8 (In buona posizione). Sia $R \subseteq S$ una regione topologica di una superficie S . Diremo che R è *in buona posizione* rispetto ad un insieme finito \mathfrak{J} di archi e curve di Jordan contenuti in R se ogni componente di ∂R interseca $J = \cup \mathfrak{J}$ in un numero finito di punti o sottoarchi.

Lemma 2.2. *Sia \mathfrak{J} un insieme finito di archi e curve di Jordan contenuti in una regione topologica $R \subseteq S$ di una superficie S in buona posizione rispetto a \mathfrak{J} e poniamo $J = \cup \mathfrak{J}$. Allora ogni coppia di punti di R può essere collegata da un arco di Jordan C , contenuto nell'interno di R esclusi al più gli estremi, tale che $C \cap J$ sia il vuoto oppure un numero finito di punti o di sottoarchi di C e che al di fuori di questi sia unione di un numero finito di archi geodetici.*

Dimostrazione. Dimostriamo, prima, l'enunciato per i punti interni a R . Diciamo che due punti dell'interno di R sono equivalenti se e solo se possono venire collegati da un arco di geodetica di Jordan: questa è, ovviamente, una relazione d'equivalenza, quindi ci basta dimostrare che le classi di equivalenza da essa definite sono aperte.

Poichè \mathfrak{J} è finito, se $p \notin J$ appartiene all'interno di R possiamo trovare un $\varepsilon > 0$ tale che la palla geodetica $B_\varepsilon(p)$ sia contenuta in $R \setminus J$. Allora ogni punto di $B_\varepsilon(p)$ può essere collegato a p tramite una geodetica che non interseca J , per cui tutti i punti di $B_\varepsilon(p)$ sono equivalenti a p .

Sia ora $p \in J$. Siccome \mathfrak{J} è finito, possiamo trovare un $\varepsilon > 0$ tale che la palla geodetica $B_\varepsilon(p) \subset R$ intersechi soltanto quegli elementi di \mathfrak{J} che contengono p . Consideriamo $q \in B_\varepsilon(p)$. Seguiamo la geodetica radiale da q fino al primo punto (p o eventualmente q) che appartiene a un elemento di \mathfrak{J} e poi seguiamo quell'elemento fino a p . Anche in questo caso tutti i punti di $B_\varepsilon(p)$ sono equivalenti a p .

In questo modo il lemma è provato per p interno ad R .

Sia ora $p_0 \in \partial R$. Se $p_0 \notin J$ o, più in generale, se esiste un intorno U di p_0 tale che $J \cap \partial R \cap U \subset \partial R$, possiamo trovare una geodetica radiale uscente da p_0 con sostegno C_0 contenuto, a parte p_0 , nell'interno di R e disgiunto da J . Sia p il secondo estremo di C_0 . Allora quanto visto finora, applicato a $\mathfrak{J}' = \mathfrak{J} \cup \{C_0\}$, ci assicura che per ogni q dell'interno di R possiamo trovare un arco di Jordan da q a p contenuto nell'interno di R che interseca gli elementi di \mathfrak{J}' in un numero finito di punti o sottoarchi. Seguiamo questo arco da q fino al primo punto di intersezione con C_0 e poi seguiamo C_0 fino a p_0 : in questo modo, come richiesto, otteniamo un arco da q a p_0 .

Se, invece, $p_0 \in \partial R \cap J$ ed esiste un elemento J_0 di \mathfrak{J} contenente p e che non è contenuto in ∂R in un intorno di p_0 , essendo R in buona posizione rispetto a \mathfrak{J} esiste un sottoarco C_0 di J_0 uscente da p_0 e contenuto nell'interno di R a parte p_0 . Allora possiamo ripetere la costruzione precedente (per i punti interni ad R), collegando p_0 a qualsiasi punto dell'interno di R con un arco con le proprietà richieste.

Infine, sia q_0 un altro punto di ∂R . Possiamo trovare un arco C_0 uscente da q_0 , contenuto nell'interno di R a parte q_0 e disgiunto da $J \setminus \{q_0\}$ o contenuto

2.2. ESISTENZA DI TRIANGOLAZIONI

in un elemento di \mathfrak{S} . Sia q l'altro estremo di C_0 . Applichiamo quanto visto a $\mathfrak{S} \cup \{C_0\}$ per ottenere un arco di Jordan come richiesto da p_0 a q . Seguiamo questo arco da p_0 fino alla prima intersezione con C_0 e poi seguiamo C_0 fino a q_0 ; allora abbiamo collegato p_0 a q_0 come voluto. \square

Osservazione 2.2. Dalla dimostrazione è chiaro che se gli elementi di \mathfrak{S} e la regione R sono regolari allora gli archi costruiti sono regolare a tratti.

Definizione 2.9 (Triangolazione subordinata). Sia \mathbf{T} una triangolazione topologica di una regione topologica $R \subseteq S$. Diremo che \mathbf{T} è *subordinata* a un ricoprimento aperto \mathfrak{U} di R se per ogni $T \in \mathbf{T}$ esiste un $U \in \mathfrak{U}$ tale che $T \subset U$.

Definizione 2.10 (In buona posizione). Sia \mathfrak{S} un insieme finito di archi e curve di Jordan in una regione topologica R . Diciamo che una triangolazione topologica \mathbf{T} di R è *in buona posizione* rispetto a \mathfrak{S} se ogni lato di \mathbf{T} interseca $J = \cup \mathfrak{S}$ in un numero finito di punti o sottoarchi.

Possiamo ora dimostrare l'esistenza delle triangolazioni:

Teorema 2.1. *Data una regione topologica $R \subseteq S$ di una superficie S , siano \mathfrak{U} un ricoprimento aperto di R , \mathfrak{S} un insieme finito di archi e curve di Jordan in R e supponiamo che R sia in buona posizione rispetto a \mathfrak{S} . Allora esiste una triangolazione topologica \mathbf{T} di R subordinata a \mathfrak{U} e in buona posizione rispetto a \mathfrak{S} .*

Dimostrazione. Ricordiamo che dato un ricoprimento aperto $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ di uno spazio metrico compatto X , il più grande $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in X$ esiste $\alpha \in A$ con $B(x, \delta) \subset U_\alpha$ è detto *numero di Lebesgue* del ricoprimento \mathfrak{U} . Sia, quindi, $\delta > 0$ il numero di Lebesgue del ricoprimento \mathfrak{U} . Per ogni $p \in R$ scegliamo $0 < \varepsilon_p < \varepsilon'_p < \text{inj rad}(p)$ tali che $\varepsilon'_p < \delta$. Supponiamo che $B_{\varepsilon'_p}(p)$ intersechi solo gli elementi di \mathfrak{S}' (ottenuto da \mathfrak{S} aggiungendo le componenti del bordo di R) che contengono p e se $p \in \partial R$ supponiamo anche che sia $B_{\varepsilon'_p}(p) \cap \partial R$ siano degli archi di Jordan. Inoltre esiste un $U \in \mathfrak{U}$ tale che $B_{\varepsilon'_p}(p) \subset U$ (per la verifica di tutte queste affermazioni si rimanda al testo [AT] capitolo 5).

La regione R è compatta, quindi, possiamo trovare $p_1, \dots, p_k \in R$ tali che $\{B_{\varepsilon_1}(p_1), \dots, B_{\varepsilon_k}(p_k)\}$ sia un ricoprimento aperto di R , posti $\varepsilon_j = \varepsilon'_{p_j}$.

Vogliamo, inizialmente, trovare k regioni regolari, o topologiche, semplici contenute in R , i cui interni, in R , formino un ricoprimento aperto di R e tali che $\mathfrak{S} \cup \{\partial R_1, \dots, \partial R_k\}$ sia in buona posizione rispetto a tutte loro.

Iniziamo con p_1 . Supponiamo ora che p_1 appartenga all'interno di R , per cui tutta la palla geodetica $B_{\varepsilon'_1}(p_1)$ è contenuta nell'interno di R . Scegliamo $\varepsilon_1 < \varepsilon''_1 < \varepsilon'_1$ e due punti $q_1, q_2 \in \partial B_{\varepsilon''_1}(p_1)$. Allora i due segmenti di geodetica radiale da p_1 a q_1 e q_2 compresi tra le circonferenze geodetiche di raggio ε''_1

2.2. ESISTENZA DI TRIANGOLAZIONI

e ε'_1 suddividono la corona $B_{\varepsilon'_1}(p_1) \setminus B_{\varepsilon_1}(p_1)$ in due regioni regolari semplici Ω_1 e Ω_2 (vedi Figura 2.4(a)).

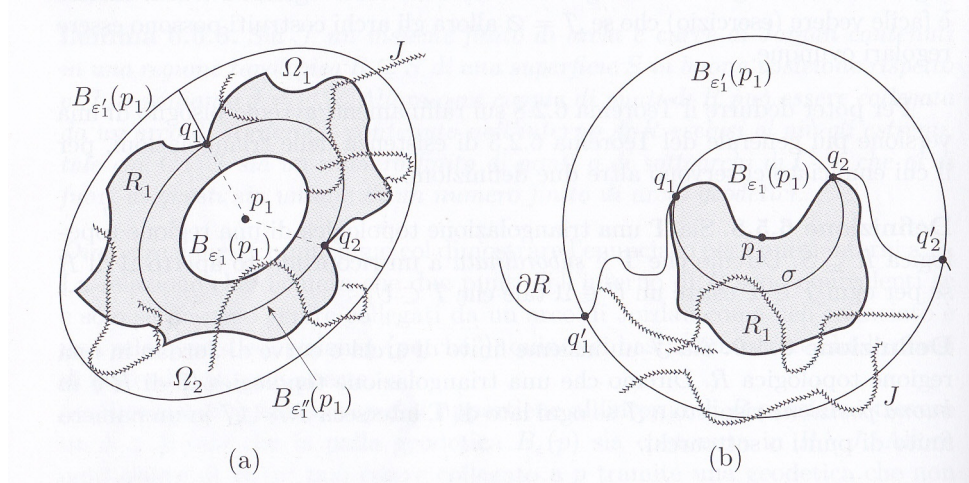


Figura 2.4:

Il Lemma 2.2 fornisce in ciascun Ω_j un arco di Jordan (regolare a tratti se gli elementi di \mathfrak{S} sono regolari) che collega q_1 a q_2 intersecando $J = \cup \mathfrak{S}$ in un numero finito di punti o sottoarchi. Questi due archi si uniscono a formare il bordo di una regione regolare, o topologica, semplice R_1 , in buona posizione rispetto a \mathfrak{S} e, inoltre, l'interno di R_1 contiene $B_{\varepsilon_1}(p_1)$. Infatti, siccome $\partial R_1 \cap \partial B_{\varepsilon_1}(p_1) = \emptyset$, o $B_{\varepsilon_1}(p_1)$ è contenuto nell'interno di R_1 , oppure è contenuto in $B_{\varepsilon'_1}(p_1) \setminus R_1$. Ma se $B_{\varepsilon_1}(p_1) \subseteq B_{\varepsilon'_1}(p_1) \setminus R_1$ allora interseca $\Omega_1 \cup \Omega_2$ perchè $B_{\varepsilon'_1}(p_1) \setminus R_1 \subseteq \Omega_1 \cup \Omega_2$, ma questo non è possibile.

Supponiamo ora che $p_1 \in \partial R$. Per ipotesi $\partial R \cap B_{\varepsilon_1}(p_1)$ è un arco di Jordan che interseca $\partial B_{\varepsilon_1}(p_1)$ in due punti: q_1 e q_2 . Seguiamo il bordo di R oltre q_1 e q_2 fino ai primi e unici punti di intersezione con $\partial B_{\varepsilon'_1}(p_1)$, che indicheremo rispettivamente con q'_1 e q'_2 . Poichè $\partial R \cap B_{\varepsilon_1}(p_1)$ è un taglio di $B_{\varepsilon_1}(p_1)$, divide $B_{\varepsilon_1}(p_1)$ in due componenti connesse; una contenuta in R e l'altra esterna a R . In particolare, solo uno dei due archi di circonferenza geodetica da q_1 a q_2 è contenuto in R ; chiamiamolo σ . Indichiamo con Ω la regione regolare, o topologica, semplice, con bordo composto da σ , dai due archi di bordo da q_j a q'_j e dall'unico arco di circonferenza geodetica da q'_1 a q'_2 in modo che $\Omega \subset R$ (Figura 2.4(b)). La dimostrazione del Lemma 2.2 ci fornisce allora un arco di Jordan, regolare a tratti se gli elementi di \mathfrak{S} sono regolari, in Ω che collega q_1 a q_2 intersecando J in un numero finito di punti e sottoarchi e contenuto nell'interno di R a parte gli estremi. Allora questo arco assieme a $\partial R \cap B_{\varepsilon_1}(p_1)$ forma il bordo di una regione regolare, o topologica, semplice $R_1 \subset R$ in buona posizione rispetto a \mathfrak{S} e si vede facilmente che $R_1 \cap B_{\varepsilon_1}(p_1) = R \cap B_{\varepsilon_1}(p_1)$.

Supponiamo ora di aver costruito R_1, \dots, R_{j-1} . Per costruire R_j applichiamo

lo stesso procedimento a p_j ma rispetto a $\mathfrak{S} \cup \{\partial R_1, \dots, \partial R_{j-1}\}$ invece del solo \mathfrak{S} ed è evidente che le regioni R_1, \dots, R_k così costruite sono come voluto.

Poichè gli interni delle regioni R_1, \dots, R_k possono intersecarsi, dobbiamo suddividerle in modo tale da evitarlo. Scartiamo subito tutte le regioni R_j contenute in qualche R_i per $i \neq j$.

Ora, può accadere che $\partial R_j \subset R_i$ per qualche $i \neq j$. Ma poichè R_j non è

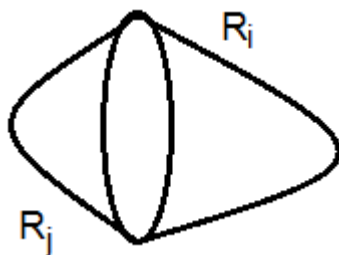


Figura 2.5:

contenuta in R_i , la regione che ∂R_j borda all'interno di R_i dev'essere il complementare in R_i del bordo di R_j . Allora $(R_i \cup R_j) \setminus \partial R_j$ è l'unione di due aperti disgiunti Ω_1 e Ω_2 , entrambi omeomorfi a un disco e di bordo comune ∂R_j , quindi è facile trovare una triangolazione di R con le proprietà volute. Prendiamo, infatti, come vertici due punti di ∂R_j : colleghiamoli con un arco in Ω_1 costruito usando il *Lemma 2.2* e scegliamo un punto dell'arco interno a Ω_1 come nuovo vertice, collegandolo, se necessario, agli altri vertici di ∂R_j . Ripetendo la procedura in Ω_2 otteniamo la triangolazione cercata.

Supponiamo ora che $\partial R_j \not\subset R_i$ per ogni $i \neq j$ e prendiamo un dato R_j . Per costruzione, ∂R_1 interseca R_j in un numero finito, o eventualmente nullo, di archi di ∂R_j e di tagli: il primo taglio divide R_j in due regioni semplici per il *Lemma 2.1*, il secondo taglio divide una di queste due regioni in due sottoregioni semplici e così via. Allora ∂R_1 divide R_j in un numero finito di regioni semplici: ognuna di queste interseca ∂R_2 in un numero finito, o eventualmente nullo, di archi nel bordo o di tagli e quindi è suddivisa da ∂R_2 in un numero finito di sottoregioni semplici. Procedendo in questo modo, R_j è alla fine suddivisa in un numero finito di sottoregioni semplici. Indichiamo con R_{jh} le regioni in cui è suddivisa R_j . Due regioni R_{jh} e R_{ik} o coincidono o hanno interni disgiunti in quanto il bordo di ciascuna delle due non interseca l'interno dell'altra.

Analogamente, ciascun ∂R_j è suddiviso in sottoarchi l_{jr} dai punti di intersezione con le altre ∂R_i o dai punti estremi dei sottoarchi che ha in comune con le altre ∂R_j . Inoltre, il bordo di ciascun R_{jh} è unione di archi l_{ir} .

Prendiamo come vertici gli estremi di tutti i l_{jr} . Se qualche R_{jh} si trova ad avere un bordo con meno di due vertici ne aggiungiamo due qualsiasi. Per ciascun R_{jh} colleghiamo due punti del suo bordo con il *Lemma 2.2* e come ulteriore vertice prendiamo un punto dell'arco interno a R_{jh} e colleghiamolo

2.2. ESISTENZA DI TRIANGOLAZIONI

agli altri vertici del bordo, sempre con il *Lemma 2.2*. Abbiamo, così, costruito la triangolazione voluta. \square

Osservazione 2.3. Se la regione R è una regione regolare e gli elementi di \mathfrak{T} sono regolari a tratti allora i lati della triangolazione topologica costruita nel teorema precedente sono regolari a tratti.

Data una triangolazione, ci sono alcune operazioni canoniche per crearne altre.

Definizione 2.11 (Prima e seconda mossa canonica). Sia $\mathbf{T} = \{T_1, \dots, T_r\}$ una triangolazione topologica di una regione regolare R . La *prima mossa canonica* consiste nel prendere un punto interno a una faccia della triangolazione e collegarlo ai tre vertici della faccia, ottenendo tre triangoli dove prima ce n'era uno solo. La *seconda mossa canonica* consiste nel prendere un punto interno a un lato della triangolazione e collegarlo con il vertice opposto di ciascuna faccia (una o due a seconda che il punto appartenga o meno al bordo della regione) che contiene quel lato.

Osservazione 2.4.

- i) La prima mossa canonica aumenta di 1 il numero dei vertici della triangolazione, di 3 il numero dei lati e di 2 il numero delle facce. La seconda mossa canonica applicata a un punto del bordo della regione aumenta di 1 il numero dei vertici della triangolazione, di 2 il numero dei lati e di 1 il numero delle facce.
- ii) La seconda mossa canonica applicata a un punto dell'interno della regione aumenta di 1 il numero dei vertici della triangolazione, di 3 il numero dei lati e di 2 il numero delle facce.

Una sequenza di mosse canoniche trasforma una triangolazione in un'altra triangolazione con facce più piccole. Diamo un nome a questa situazione:

Definizione 2.12 (Raffinamento). Una triangolazione \mathbf{T}' è un *raffinamento* di una triangolazione \mathbf{T} se ogni triangolo di \mathbf{T}' è contenuto in un triangolo di \mathbf{T} .

Lemma 2.3. Sia \mathbf{T} una triangolazione topologica di una superficie regolare $R \subseteq S$ con lati regolari a tratti. Allora esiste un *raffinamento* di \mathbf{T} che è una triangolazione regolare di R .

Dimostrazione. Otteniamo la triangolazione regolare cercata collegando ogni vertice di un lato di \mathbf{T} che non sia già un vertice della triangolazione con il vertice opposto della stessa faccia, usando il *Lemma 2.2* e l'*Osservazione 2.2* per assicurarci che il nuovo lato sia un arco di Jordan regolare. \square

2.2. ESISTENZA DI TRIANGOLAZIONI

Dall'Osservazione 2.4, dal Teorema 2.1 e dal Lemma 2.3 segue il seguente teorema:

Teorema 2.2. *Sia $R \subseteq S$ una regione regolare su una superficie S e \mathcal{U} un ricoprimento aperto di R . Allora esiste una triangolazione T di R tale che per ogni $T \in \mathcal{T}$ esiste $U \in \mathcal{U}$ con $T \subset U$.*

Dobbiamo trovare un modo, ora, di confrontare triangolazioni diverse, poichè due triangolazioni diverse non ammettono necessariamente un raffinamento comune: se un lato di T_1 interseca in infiniti punti isolati un lato di T_0 allora T_0 e T_1 non possono avere un raffinamento comune. Bisognerà, quindi, passare da una triangolazione intermedia.

Definizione 2.13 (In buona posizione). Diremo che due triangolazioni sono in buona posizione se ciascuna delle due è in buona posizione rispetto alla famiglia dei lati dell'altra.

Corollario 2.1. *Sia $R \subseteq S$ una regione regolare, \mathcal{U} un ricoprimento aperto di R e T_0, T_1 due triangolazioni topologiche (regolari) di R . Allora esiste una triangolazione topologica (con lati regolari a tratti) T^* subordinata a \mathcal{U} che è in buona posizione sia con T_0 che con T_1 .*

Dimostrazione. \mathfrak{S} è la famiglia formata dai lati di T_0 e di T_1 , allora R è in buona posizione rispetto a \mathfrak{S} . Ora basta applicare il Teorema 2.1 e l'Osservazione 2.4 per ottenere una triangolazione T^* topologica (con lati regolari a tratti se T_0 e T_1 erano regolari), in buona posizione rispetto sia a T_0 che a T_1 . \square

Proposizione 2.1. *Sia $R \subseteq S$ una regione regolare e siano T_0, T_1 due triangolazioni topologiche di R (con lati regolari a tratti). Supponiamo che T_0 e T_1 siano in buona posizione. Allora esiste una triangolazione topologica (regolare) T^* che è un raffinamento sia di T_0 che di T_1 .*

Dimostrazione. Sia T_0 una faccia di T_0 ; dobbiamo verificare che i lati di T_1 la suddividono in un numero finito di regioni topologiche semplici (con bordo regolare a tratti).

Poichè T_0 e T_1 sono in buona posizione, ogni lato di T_1 o è completamente contenuto nell'interno di T_0 o interseca il bordo di T_0 in un numero finito di punti o sottoarchi. Il Lemma 2.1 mostra che i lati di T_1 senza vertici interni a T_0 suddividono T_0 in un numero finito di regioni regolari semplici (con bordo regolare a tratti).

Ora supponiamo che esista un lato l di T_1 con un vertice interno a una di queste regioni regolari semplici R_j , ma non completamente contenuto nell'interno di R_j . Siccome le facce di T_1 coprono tutto R_j , possiamo sicuramente costruire un arco di Jordan (regolare a tratti) che parte dal vertice

2.2. ESISTENZA DI TRIANGOLAZIONI

interno di l e che raggiunge il bordo di R_j , procedendo prima, se necessario, lungo lati di \mathbf{T}_1 completamente interni a R_j . Unendo questo arco con il sottoarco di l dal vertice interno al bordo R_j otteniamo un taglio che, quindi, divide, per il *Lemma 2.1*, R_j in due regioni semplici (regolari a tratti).

Ripetiamo la procedura così da trattare tutti i lati di \mathbf{T}_1 , in quanto ogni lato di \mathbf{T}_1 completamente interno a una regione R_j dev'essere, chiaramente, collegabile al bordo di R_j tramite un arco composto da lati di \mathbf{T}_1 e quindi possiamo procedere come nel caso precedente. Poichè \mathbf{T}_1 ha un numero finito di lati, in un numero finito di passaggi abbiamo completato la costruzione. \square

Dal *Corollario 2.1* e dalla *Proposizione 2.1* segue il seguente teorema:

Teorema 2.3. *Siano \mathbf{T}_0 e \mathbf{T}_1 due triangolazioni topologiche (regolari) di una regione regolare $R \subseteq S$. Allora esistono sempre una triangolazione topologica \mathbf{T}^* (con lati regolari a tratti) e due triangolazioni topologiche (regolari) \mathbf{T}_0^* e \mathbf{T}_1^* tali che \mathbf{T}_0^* sia un raffinamento sia di \mathbf{T}_0 che di \mathbf{T}^* e \mathbf{T}_1^* sia un raffinamento comune sia di \mathbf{T}_1 che di \mathbf{T}^* .*

Definiamo, grazie a questo teorema, un invariante topologico fondamentale delle regioni regolari.

Teorema 2.4. *Siano \mathbf{T}_0 e \mathbf{T}_1 due triangolazioni topologiche di una regione regolare $R \subseteq S$. Allora*

$$f(\mathbf{T}_0) - l(\mathbf{T}_0) + v(\mathbf{T}_0) = f(\mathbf{T}_1) - l(\mathbf{T}_1) + v(\mathbf{T}_1).$$

Dimostrazione. L'uguaglianza vale se \mathbf{T}_1 è un raffinamento di \mathbf{T}_0 : partendo da \mathbf{T}_1 possiamo riottenere \mathbf{T}_0 tramite una successione finita delle seguenti operazioni (*Figura 2.6*):

- (1) togliere un lato che collega due vertici in cui arrivano almeno altri due lati;
- (2) cancellare un vertice in cui arrivano solo due lati.

Non è detto che le facce, nel senso di componenti connesse del complementare in R dell'unione dei lati, che si ottengono, durante i passaggi intermedi, siano sempre triangoli, nel senso che hanno solo tre vertici nel bordo; ma sono sicuramente sempre aperti connessi e saranno, quindi, nuovamente triangoli al termine delle operazioni.

L'operazione (1) diminuisce di 1 sia il numero dei lati che il numero delle facce, mentre l'operazione (2) diminuisce di 1 sia il numero dei lati che il numero dei vertici. In entrambi i casi la quantità ottenuta sottraendo il numero dei lati alla somma del numero delle facce e dei vertici non cambia,

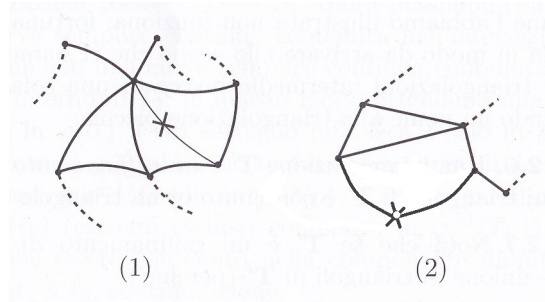


Figura 2.6:

allora l'uguaglianza è dimostrata per i raffinamenti.

Per il Teorema 2.3 siano \mathbf{T}^* , \mathbf{T}_0^* e \mathbf{T}_1^* le tre triangolazioni definite tramite tale teorema. Allora

$$\begin{aligned} f(\mathbf{T}_0) - l(\mathbf{T}_0) + v(\mathbf{T}_0) &= f(\mathbf{T}_0^*) - l(\mathbf{T}_0^*) + v(\mathbf{T}_0^*) = \\ &= f(\mathbf{T}^*) - l(\mathbf{T}^*) + v(\mathbf{T}^*) = f(\mathbf{T}_1^*) - l(\mathbf{T}_1^*) + v(\mathbf{T}_1^*) = f(\mathbf{T}_1) - l(\mathbf{T}_1) + v(\mathbf{T}_1). \end{aligned}$$

□

Definizione 2.14 (Caratteristica di Eulero-Poincaré). La *caratteristica di Eulero-Poincaré* $\chi(R)$ di una regione regolare R contenuta in una superficie S è definita da

$$\chi(R) = f(\mathbf{T}) - l(\mathbf{T}) + v(\mathbf{T}) \in \mathbb{Z},$$

dove \mathbf{T} è una qualunque triangolazione topologica di R .

Proposizione 2.2. 1. Se $R \subseteq S$ e $R' \subseteq S'$ sono due regioni regolari omeomorfe, allora $\chi(R) = \chi(R')$.

2. La caratteristica di Eulero-Poincaré di una regione regolare semplice è 1.

3. La caratteristica di Eulero-Poincaré di una sfera è 2.

4. La caratteristica di Eulero-Poincaré di un toro è 0.

Dimostrazione. 1. Se $\psi : R \rightarrow R'$ è un omeomorfismo e $\mathbf{T} = \{T_1, \dots, T_r\}$ è una triangolazione topologica di R , allora $\psi(\mathbf{T}) = \{\psi(T_1), \dots, \psi(T_r)\}$ è una triangolazione topologica di R' con ugual numero di facce, lati e vertici, per cui $\chi(R) = \chi(R')$.

2. Una regione regolare semplice è omeomorfa a un disco chiuso che è omeomorfo al triangolo standard, la cui caratteristica di Eulero-Poincaré è chiaramente 1.

2.2. ESISTENZA DI TRIANGOLAZIONI

3. Poichè la sfera è omeomorfa ad un tetraedo (vedi *Figura 2.7 (a)*), possiamo costruire facilmente una triangolazione di una sfera S con 4 facce, 6 lati e 4 vertici. Allora $\chi(S) = 2$.
4. Usando come modello un quadrato con i lati identificati, otteniamo una triangolazione di un toro con 8 facce, 12 lati e 4 vertici (vedi *Figura 2.7 (b)*), per cui la caratteristica di Eulero-Poincaré del toro è zero.

□

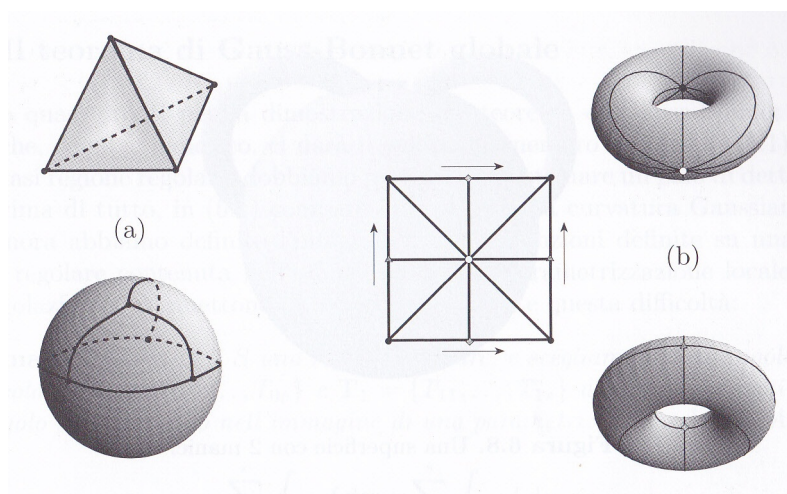


Figura 2.7:

Per concludere il capitolo enunciamo il *teorema di classificazione delle superfici compatte orientabili*.

Definizione 2.15 (Manico e sfera con g manici). Un *manico* in una superficie S è una regione regolare M in S omeomorfa a un cilindro circolare finito chiuso e tale che $S \setminus M$ sia connessa. Dato $g \in \mathbb{N}$, una *sfera con g manici* è una superficie S contenente g manici M_1, \dots, M_g disgiunti in modo che $S \setminus (M_1 \cup \dots \cup M_g)$ sia una sfera privata di $2g$ dischi geodetici chiusi disgiunti (*Figura 2.8*).

Teorema 2.5 (*classificazione delle superfici compatte orientabili*). Ogni superficie compatta orientabile è omeomorfa a una sfera con $g \geq 0$ manici che ha come caratteristica di Eulero-Poincaré $2 - 2g$.

1. Due superfici compatte orientabili sono omeomorfe se e solo se hanno la stessa caratteristica di Eulero-Poincaré;
2. la sfera è l'unica superficie compatta orientabile con caratteristica di Eulero-Poincaré positiva;

2.2. ESISTENZA DI TRIANGOLAZIONI

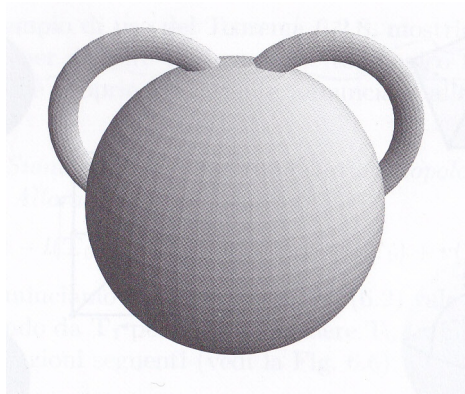


Figura 2.8: una superficie con due manici

3. il toro è l'unica superficie compatta orientabile con caratteristica di Eulero-Poincaré nulla.

Dimostrazione. Per la dimostrazione si veda [5].

□

Capitolo 3

Il teorema di Gauss-Bonnet globale e alcune applicazioni

3.1 Il teorema di Gauss-Bonnet globale

Prima di dare enunciato e dimostrazione del *teorema di Gauss-Bonnet* globale dobbiamo superare un paio di difficoltà: la prima sarà dare una definizione di integrale più generale e quindi non solo per funzioni definite su una regione regolare contenuta nell'immagine di una parametrizzazione locale. Ciò è necessario poichè nella formula del teorema compare l'integrale della curvatura Gaussiana. Questo problema, però, è facilmente risolvibile usando le triangolazioni.

Lemma 3.1. *Sia $R \subseteq S$ una regione regolare e scegliamo due triangolazioni regolari $T_0 = \{T_{0_1}, \dots, T_{0_r}\}$ e $T_1 = \{T_{1_1}, \dots, T_{1_s}\}$ di R tali che ogni loro triangolo sia contenuto nell'immagine di una parametrizzazione locale. Allora*

$$\sum_{h=1}^r \int_{T_{0_h}} f dv = \sum_{k=1}^s \int_{T_{1_k}} f dv$$

per ogni funzione continua $f : R \rightarrow \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Siano

$$\mathbf{T}^* = \{T_{1^*}^*, \dots, T_{u^*}^*\}, \quad \mathbf{T}_0^* = \{T_{0_1^*}^*, \dots, T_{v_0^*}^*\}, \quad \mathbf{T}_1^* = \{T_{1_1^*}^*, \dots, T_{w_1^*}^*\}$$

le triangolazioni date dal *Teorema 2.3*. Poichè ogni triangolo di \mathbf{T}_0 è unione di un numero finito di triangoli di \mathbf{T}_0^* e, viceversa, ogni triangolo di \mathbf{T}_0^* è contenuto in un unico triangolo di \mathbf{T}_0 otteniamo

$$\sum_{h=1}^r \int_{T_{0_h}} f dv = \sum_{j=1}^v \int_{T_{0_j^*}} f dv.$$

Ripetendo il ragionamento con \mathbf{T}^* e \mathbf{T}_0^* , poi con \mathbf{T}^* e \mathbf{T}_1^* e infine con \mathbf{T}_1 e \mathbf{T}_1^* otteniamo la tesi. \square

Passiamo, quindi, a definire l'integrale di una funzione continua f su qualsiasi regione regolare $R \subseteq S$.

Definizione 3.1 (Integrale di f su R). Sia $R \subseteq S$ una regione regolare di una superficie S e $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora l'integrale di f su R è

$$\int_R f dv = \sum_{j=1}^r \int_{T_j} f dv,$$

dove $\mathbf{T} = \{T_1, \dots, T_r\}$ è una qualsiasi triangolazione regolare di R i cui triangoli siano contenuti nelle immagini di parametrizzazioni locali.

Osservazione 3.1.

- i) La triangolazione $\mathbf{T} = \{T_1, \dots, T_r\}$ esiste grazie al Teorema 2.2.
- ii) Il Lemma 3.1 ci assicura che $\int_R f dv$ non dipende dalla scelta di \mathbf{T} , per cui è ben definito.

La seconda difficoltà per calcolare il membro sinistro dell'equazione del teorema di Gauss-Bonnet per regioni regolari qualsiasi consiste nell'integrale della curvatura geodetica. Essa è definita solo per superfici orientabili: non ci basterà assumere che la regione R sia contenuta in una superficie orientabile poichè la curvatura geodetica cambia di segno se invertiamo l'orientazione di una curva. Dobbiamo, quindi, fissare l'orientazione dei poligoni curvilinei che formano R .

Definizione 3.2 (Versore normale intrinseco). Sia $\sigma : I \rightarrow S$ una curva parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco in una superficie orientata S e $N : S \rightarrow S^2$ la mappa di Gauss di S . Il versore normale intrinseco di σ è l'applicazione $\hat{\mathbf{n}} \in \mathcal{T}(\sigma)$ (si ricordi l'Osservazione 0.14) data da

$$\hat{\mathbf{n}} = (N \circ \sigma) \wedge \dot{\sigma}.$$

Osservazione 3.2. Notiamo che $\hat{\mathbf{n}}(s)$ è l'unico versore in $T_{\sigma(s)}S$ tale che $\{\dot{\sigma}(s), \hat{\mathbf{n}}\}$ sia una base ortonormale positiva di $T_{\sigma(s)}S$, per ogni $s \in I$.

Definizione 3.3 (Introduzione). Sia $R \subset S$ una regione regolare di una superficie S . Diremo che una curva regolare $\tau : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ si inserisce o entra dentro R se $\tau(0) \in \partial R$, $\tau(t) \in R$ per ogni $t > 0$ e $\tau(t) \notin R$ per ogni $t < 0$. Inoltre, se $\tau(0)$ non è un vertice di ∂R richiederemo anche che $\tau'(0)$ non sia tangente a ∂R .

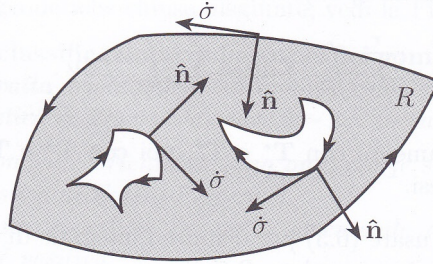


Figura 3.1:

Definizione 3.4 (Orientato positivamente). Sia $R \subset S$ una regione regolare di una superficie S e $\sigma : [a, b] \rightarrow S$ un poligono curvilineo che parametrizza una delle componenti del bordo di R . Diremo che σ è *orientato positivamente rispetto a R* se il versore normale intrinseco \hat{n} di σ , definito fuori dai vertici, punta verso l'interno di R , nel senso che per ogni $s_0 \in [a, b]$ tale che $\sigma(s_0)$ non sia un vertice e ogni curva regolare $\tau : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ con $\tau(0) = \sigma(s_0)$ che entra dentro R si ha $\langle \tau'(0), \hat{n}(s_0) \rangle \geq 0$ (Figura 3.1). Infine diremo che il bordo della regione regolare R è *orientato positivamente* se ogni sua componente lo è rispetto a R .

Dobbiamo verificare, affinché la definizione sia ben posta, che il bordo di una regione regolare può sempre venire orientato positivamente.

Lemma 3.2. Sia $\sigma : [a, b] \rightarrow S$ una curva parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco in una superficie orientata S . Allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che l'applicazione $\varphi : (a, b) \times (-\delta, \delta) \rightarrow S$ data da

$$\varphi(s, t) = \exp_{\sigma(s)}(t\hat{n}(s))$$

sia una parametrizzazione locale di S .

Dimostrazione. Per la *Proposizione 0.10*, essendo $[a, b]$ compatto e per $\delta > 0$ abbastanza piccolo, la φ è ben definita e di classe C^∞ . Per ogni $s_0 \in [a, b]$ si ha

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s_0, 0) = \dot{\sigma}(s_0) \quad e \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s_0, 0) = \frac{d}{dt} \exp_{\sigma(s)}(t\hat{n}(s_0)) \Big|_{t=0} = \hat{n}(s_0);$$

quindi per ogni $s_0 \in [a, b]$ possiamo trovare $\delta_{s_0} > 0$ tale che

$\varphi|_{(s_0 - \delta_{s_0}, s_0 + \delta_{s_0}) \times (-\delta_{s_0}, \delta_{s_0})}$ sia una parametrizzazione locale. Ricordando, ora, la *Proposizione 0.1*, possiamo trovare un $\delta > 0$ come richiesto. \square

Sia allora $\sigma : [a, b] \rightarrow S$ un poligono curvilineo componente del bordo di una regione regolare R in una superficie orientata S e supponiamo, inizialmente, che σ non abbia vertici. Preso $s_0 \in (a, b)$ (per le periodicità di

σ , possiamo anche supporre $s_0 \neq a, b$, sia $\tau : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ una curva con $\tau(0) = \sigma(s_0)$ che entra dentro R . Se $\varphi : U \rightarrow S$ è la parametrizzazione locale del lemma precedente, dove $U = (a, b) \times (-\delta, \delta)$, a meno di rimpicciolire ε possiamo trovare due funzioni $\tau_1, \tau_2 : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^∞ tali che $\tau = \varphi(\tau_1, \tau_2)$; in particolare,

$$\langle \tau'(0), \hat{\mathbf{n}}(s_0) \rangle = \tau_2'(0).$$

Allora $\hat{\mathbf{n}}(s_0)$ punta verso l'interno di R se e solo se τ_2 è non decrescente in 0. Poichè $\tau_2(0) = 0$ dobbiamo avere $\tau_2(t) \geq 0$ per $t > 0$ piccolo e $\tau_2(t) < 0$ per $t < 0$ piccolo: non può essere uguale a zero perchè $\tau(t)$ non appartiene a R per $t < 0$. Per la definizione di φ otteniamo, quindi, che $\hat{\mathbf{n}}(s_0)$ punta verso l'interno di R se e solo se la curva $t \mapsto \varphi(s_0, t)$ entra dentro R .

Per costruzione $\sigma = \varphi(\bullet, 0)$; l'interno di R , allora, deve intersecare una e una sola delle due componenti connesse di $\varphi(U \setminus \{t = 0\})$. Allora σ è orientata positivamente rispetto ad R se e solo se l'interno di R interseca la componente connessa di $\varphi(U \setminus \{t = 0\})$ corrispondente a $t > 0$; poichè cambiare orientazione a σ corrisponde a cambiare di segno $\hat{\mathbf{n}}$ e quindi a scambiare le due componenti connesse di $\varphi(U \setminus \{t = 0\})$, siamo sicuri che esattamente una delle due orientazioni di σ la orienta positivamente rispetto a R . Non appena $\hat{\mathbf{n}}(s_0)$ punta verso l'interno di R per un $s_0 \in [a, b]$, la curva σ è orientata positivamente rispetto a R .

Se, invece, σ ha dei vertici, possiamo modificare σ ed R vicino ai vertici in modo da ottenere una successione $\sigma_k : [a, b] \rightarrow S$ di poligoni curvilinei privi di vertici che coincidono su sottointervalli sempre più grandi, convergenti a σ e che parametrizzano opportune componenti del bordo di regioni regolari R_k . Quindi non appena orientiamo positivamente una σ_k rispetto a R_k allora anche tutte le altre lo sono rispetto alla loro regione regolare. Passando al limite otteniamo una e una sola orientazione di σ che la rende orientata positivamente rispetto a R .

Osservazione 3.3.

- i) Equivalentemente il ragionamento precedente ci dice che se R ed R' sono regioni regolari della stessa superficie orientata tali che $\partial R \cap \partial R'$ consista in un tratto di un poligono curvilineo σ , allora σ è orientata positivamente rispetto a R se e solo se è orientata negativamente rispetto a R' .
- ii) Ci resta da verificare che se $R \subset S$ è una regione regolare semplice contenuta nell'immagine di una parametrizzazione locale ortogonale $\varphi : U \rightarrow S$ allora la *Definizione 1.4* e la *Definizione 3.4* di bordo orientato positivamente coincidono.
Senza perdita di generalità supponiamo che il bordo $\sigma : [a, b] \rightarrow S$ di R non abbia vertici.

3.1. IL TEOREMA DI GAUSS-BONNET GLOBALE

Posto $\sigma_0 = \varphi^{-1} \circ \sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ sappiamo, per la *Proposizione 1.1*, che $\rho(\sigma) = +1$ se e solo se $\rho(\sigma_0) = +1$ se e solo se il versore normale di σ_0 punta verso l'interno di $\varphi^{-1}(R)$. Possiamo, quindi, scrivere

$$\dot{\sigma} = \dot{\sigma}_1 \partial_1 + \dot{\sigma}_2 \partial_2 = \sqrt{E} \dot{\sigma}_1 \frac{\partial_1}{\sqrt{E}} + \sqrt{G} \dot{\sigma}_2 \frac{\partial_2}{\sqrt{G}};$$

quindi il versore normale intrinseco di σ è dato da

$$\hat{\mathbf{n}} = -\sqrt{\frac{G}{E}} \dot{\sigma}_2 \partial_1 + \sqrt{\frac{E}{G}} \dot{\sigma}_1 \partial_2.$$

Invece il versore normale orientato $\tilde{\mathbf{n}}_0$ di σ_0 è $\tilde{\mathbf{n}}_0 = (-\dot{\sigma}_2, \dot{\sigma}_1) / \|\dot{\sigma}_0\|$. Fissiamo ora $s_0 \in [a, b]$. Una curva $\tau : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ entra dentro R in $\sigma(s_0)$ se e solo se $\tau_0 := \varphi^{-1} \circ \tau = (\tau_1, \tau_2)$ entra dentro $\varphi^{-1}(R)$ in $\sigma_0(s_0)$. Poichè $\tau' = \tau'_1 \partial_1 + \tau'_2 \partial_2$, abbiamo

$$\langle \tau'(0), \hat{\mathbf{n}}(s_0) \rangle = \sqrt{EG} \left[-\tau'_1(0) \dot{\sigma}_2(s_0) + \tau'_2(0) \dot{\sigma}_1(s_0) \right],$$

$$\langle \tau'_0(0), \tilde{\mathbf{n}}_0(s_0) \rangle = \frac{1}{\|\dot{\sigma}_0(s_0)\|} \left[-\tau'_1(0) \dot{\sigma}_2(s_0) + \tau'_2(0) \dot{\sigma}_1(s_0) \right];$$

quindi $\tilde{\mathbf{n}}_0$ punta verso l'interno di $\varphi^{-1}(R)$ se e solo se $\hat{\mathbf{n}}$ punta verso l'interno di R .

Siamo pronti ora per enunciare

Teorema 3.1 (Teorema di Gauss-Bonnet globale). *Sia $R \subseteq S$ una regione regolare di una superficie S orientata, con ∂R orientato positivamente. Siano C_1, \dots, C_s le componenti del bordo di R , parametrizzate per $j = 1, \dots, s$ dalle curve $\sigma_j : [a_j, b_j] \rightarrow S$ con curvatura geodetica κ_g^j (e se $R = S$ allora $\partial R = \emptyset$). Indichiamo, inoltre, con $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p\}$ l'insieme di tutti gli angoli esterni delle curve $\sigma_1, \dots, \sigma_s$. Allora*

$$\int_R K dv + \sum_{j=1}^s \int_{a_j}^{b_j} \kappa_g^j ds + \sum_{h=1}^p \varepsilon_h = 2\pi \chi(R).$$

Dimostrazione. Sia \mathbf{T} una triangolazione di R tale che ogni triangolo di \mathbf{T} sia contenuto nell'immagine di una parametrizzazione locale ortogonale compatibile con l'orientazione, tale triangolazione esiste per il *Teorema 2.2*. Orientiamo positivamente il bordo di ciascun triangolo: questa orientazione è compatibile con quella del bordo di R .

A ciascun triangolo applichiamo il *teorema di Gauss-Bonnet locale* e sommiamo. Poichè, grazie alle *Osservazioni 2.1 v) e 3.3 i)*, gli integrali della

3.1. IL TEOREMA DI GAUSS-BONNET GLOBALE

curvatura geodetica sui lati interni della triangolazione si elidono a due a due, otteniamo

$$\int_R Kdv + \sum_{j=1}^s \int_{a_j}^{b_j} \kappa_g^j ds + \sum_{i=1}^{f(\mathbf{T})} \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij} = 2\pi f(\mathbf{T}),$$

dove $\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i2}$ ed ε_{i3} sono gli angoli esterni del triangolo $T_i \in \mathbf{T}$. Se indichiamo con $\phi_{ij} = \pi - \varepsilon_{ij}$ gli angoli interni del triangolo T_i , si ha

$$\sum_{i=1}^{f(\mathbf{T})} \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij} = 3\pi f(\mathbf{T}) - \sum_{i=1}^{f(\mathbf{T})} \sum_{j=1}^3 \phi_{ij}.$$

Indichiamo con l_i , rispettivamente l_b , il numero dei lati della triangolazione interni a R , rispettivamente sul bordo di R , e con v_i , rispettivamente v_b , il numero di vertici della triangolazione interni a R , appartenenti al bordo di R ; ovviamente $l_i + l_b = l(\mathbf{T})$ e $v_i + v_b = v(\mathbf{T})$. Ma $l_b = v_b$, poichè il bordo di R è costituito da poligoni curvilinei. Inoltre, ogni faccia ha tre lati, ogni lato interno è lato di due facce e ogni lato sul bordo è lato di una faccia sola, (*Osservazione 2.1 v*), per cui

$$3f(\mathbf{T}) = 2l_i + l_b.$$

Allora

$$\sum_{i=1}^{f(\mathbf{T})} \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij} = 2\pi l_i + \pi l_b - \sum_{i=1}^{f(\mathbf{T})} \sum_{j=1}^3 \phi_{ij}.$$

Indicando con $v_{bc} = p$ il numero di vertici dei poligoni curvilinei componenti il bordo di R e con v_{bt} il numero degli altri vertici della triangolazione sul bordo, possiamo scrivere $v_b = v_{bc} + v_{bt}$. La somma degli angoli interni attorno a ciascun vertice interno è 2π , la somma degli angoli interni su ciascun vertice esterno che non sia vertice di ∂R è π e la somma degli angoli interni su un vertice di ∂R è π meno l'angolo esterno corrispondente. Quindi otteniamo

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{f(\mathbf{T})} \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij} &= 2\pi l_i + \pi l_b - 2\pi v_i - \pi v_{bt} - \sum_{h=1}^p (\pi - \varepsilon_j) = \\ &= 2\pi l_i + 2\pi l_b - \pi v_b - 2\pi v_i - \pi v_{bt} - \pi v_{bc} + \sum_{h=1}^p \varepsilon_j = \\ &= 2\pi l(\mathbf{T}) - 2\pi v(\mathbf{T}) + \sum_{h=1}^p \varepsilon_j, \end{aligned}$$

e abbiamo concluso. □

3.2 Applicazioni

3.2.1 Regioni regolari con bordo

1. Consideriamo un dominio Ω , contenuto in una superficie orientata S , semplicemente connesso decomposto in due sottoinsiemi Ω_1 e Ω_2 (Figura 3.3).

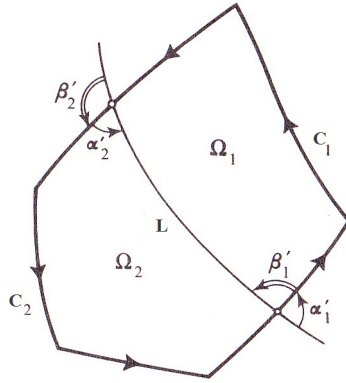


Figura 3.2: dominio decomposto in due sottoinsiemi

Sia C il bordo di Ω , orientato coerentemente rispetto ad S secondo la Definizione 3.4. Denotiamo con C_1, C_2 le parti del bordo rispettivamente di Ω_1 e Ω_2 . La curva che separa i due sottoinsiemi sarà indicata con L . Infine denotiamo con α'_j gli angoli al vertice del bordo di Ω_1 e con β'_k quelli del bordo di Ω_2 . Abbiamo quindi

$$\int_{\Omega_1} Kdv + \int_{C_1} \kappa_g ds + \int_L \kappa_g ds + \sum \alpha'_j = 2\pi,$$

$$\int_{\Omega_2} Kdv + \int_{C_2} \kappa_g ds - \int_L \kappa_g ds + \sum \beta'_j = 2\pi.$$

Facciamo qualche osservazione: se denotiamo con γ_i gli angoli del bordo del dominio $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, si può vedere facilmente che

$$\sum \alpha'_j + \sum \beta'_j = \sum \gamma_i + 2\pi$$

poichè $\alpha'_1 + \beta'_1 = \alpha'_2 + \beta'_2 = \pi$.

Sommando ora le due equazioni otteniamo:

$$\int_{\Omega} Kdv + \int_C \kappa_g ds + \sum \gamma_i + 2\pi = 4\pi$$

e quindi

$$\int_{\Omega} Kdv + \int_C \kappa_g ds + \sum \gamma_i = 2\pi.$$

In particolare, se il bordo è privo di punti angolosi e di classe C^2 , allora $\sum \gamma_i = 0$ e abbiamo

$$\int_{\Omega} Kdv + \int_C \kappa_g ds = 2\pi.$$

2. Consideriamo un **anello** Ω , contenuto in una superficie S orientata, quindi non semplicemente connesso, il cui bordo consiste di due curve C e C' (si veda ad esempio la *Figura 3.4*). Su ogni componente del bordo l'orientazione è indotta dall'orientazione del dominio stesso, secondo la *Definizione 3.4*.

Dividiamo il dominio in due parti Ω_1 e Ω_2 , semplicemente connesse, tramite le curve L_1 e L_2 che intersecano C rispettivamente in A e B , e C' rispettivamente in A' e B' . Il bordo di Ω_1 consiste in C_1, L_1, C'_1, L_2 e il bordo di Ω_2 in $C_2, -L_1, C'_2, -L_2$ dove $-L_i$ denota L_i con orientazione opposta.

Notiamo che $\gamma_A + \delta_A = \gamma_{A'} + \delta_{A'} = \gamma_B + \delta_B = \gamma_{B'} + \delta_{B'} = \pi$, così che la somma di questi otto angoli è uguale a 4π .

Applicando ora la formula di Gauss-Bonnet separatamente ad ogni dominio semplicemente connesso otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} Kdv + \int_{C_1} \kappa_g ds + \int_{L_1} \kappa_g ds + \int_{C'_1} \kappa_g ds + \int_{L_2} \kappa_g ds + \\ + \sum_i^m \alpha_i + \gamma_A + \gamma_{A'} + \gamma_B + \gamma_{B'} = 2\pi, \\ \int_{\Omega_2} Kdv + \int_{C_2} \kappa_g ds - \int_{L_1} \kappa_g ds + \int_{C'_2} \kappa_g ds - \int_{L_2} \kappa_g ds + \\ + \sum_{m+1}^n \alpha_i + \delta_A + \delta_{A'} + \delta_B + \delta_{B'} = 2\pi. \end{aligned}$$

Sommando le due espressioni abbiamo

$$\int_{\Omega} Kdv + \int_C \kappa_g ds + \int_{C'} \kappa_g ds + \sum_1^n \alpha_i + 4\pi = 4\pi.$$

Poichè $\int_C \kappa_g ds + \int_{C'} \kappa_g ds$ è l'integrale dell'intero bordo di Ω otteniamo finalmente

$$\int_{\Omega} Kdv + \int_{\partial\Omega} \kappa_g ds + \sum_1^n \alpha_i = 0.$$

In generale, si può dimostrare che per un dominio Ω , contenuto in una

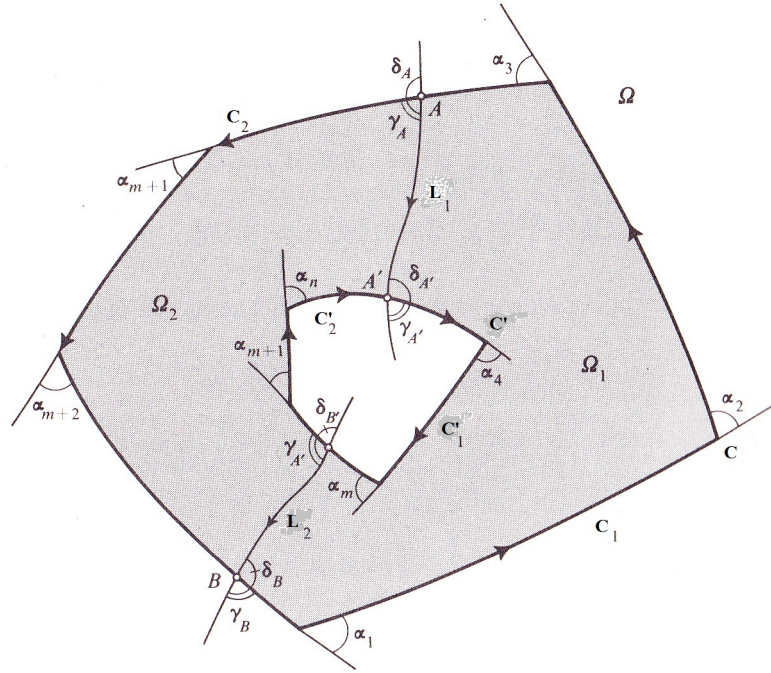


Figura 3.3: anello

superficie S orientata, con n buchi avente $n+1$ componenti di bordo orientate secondo la *Definizione 3.4* si ha

$$\int_{\Omega} K dv + \int_{\partial\Omega} \kappa_g ds + \sum \alpha_i = 2\pi(1 - n).$$

Consideriamo ora regioni regolari con bordo costituito da poligoni geodetici, cioè poligoni curvilinei i cui tratti regolari siano geodetiche.

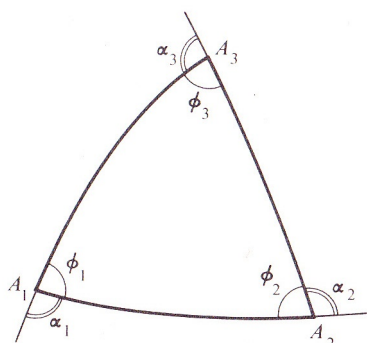
3. Consideriamo un **triangolo geodetico** T , cioè un triangolo i cui lati siano geodetiche (*Figura 3.5*).

Gli angoli interni verranno indicati con $\phi_j = \pi - \alpha_j$ ($j = 1, 2, 3$). Sappiamo che

$$\int_T K dv + \sum_{j=1}^3 \alpha_j = 2\pi$$

cioè

$$\int_T K dv = 2\pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 - \pi$$

Figura 3.4: *triangolo geodetico*

Se interpretiamo, quindi, le geodetiche come l'equivalente dei segmenti su una superficie qualsiasi, la formula precedente rende non valido il teorema di Euclide (la somma degli angoli interni di un triangolo è π) per superfici che non siano il piano.

Se K è costante abbiamo $K \cdot \text{area}(T) = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 - \pi$. $K = 0$ implica quindi $\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = \pi$ per qualsiasi T : su una superficie di curvatura costante il teorema di Euclide è vero se $K = 0$.

In generale, per un poligono geodetico di n lati, dove ϕ_i sono i suoi angoli interni, abbiamo

$$\int_T K dv = \sum_{i=1}^n \phi_i - \pi(n-2).$$

Altre applicazioni del *teorema di Gauss-Bonnet* alle geodetiche sono date da:

Proposizione 3.1. *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientabile diffeomorfa a un cilindro circolare e con $K < 0$ ovunque. Allora su S esiste (a meno di riparametrizzazioni) al più una sola geodetica chiusa semplice e questa geodetica non può essere il bordo di una regione regolare semplice.*

Ricordando il

Teorema 3.2 (di Jordan per curve regolari). *Sia $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva di Jordan regolare di classe C^2 e indichiamo con $C = \sigma([a, b])$ il suo sostegno. Allora $\mathbb{R}^2 \setminus C$ ha esattamente due componenti connesse e C è la loro frontiera comune.*

3.2. APPLICAZIONI

la cui dimostrazione è data nel testo [1] a pagina 81, diamo la dimostrazione della *Proposizione 3.1*:

Dimostrazione. Sia $C \subset S$ il sostegno di una geodetica chiusa semplice $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow S$. Per assurdo, supponiamo che C sia il bordo di una regione regolare semplice $R \subset S$. Allora per il *teorema di Gauss-Bonnet* e per la *Proposizione 2.2 2)* abbiamo

$$2\pi = 2\pi\chi(R) = \int_R Kdv < 0,$$

impossibile.

S è diffeomorfa a un cilindro circolare, che è diffeomorfo a sua volta al piano privato di un punto, allora deve esistere $\Phi : S \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ diffeomorfismo. La curva $\Phi \circ \sigma$ è quindi una curva di Jordan nel piano, di sostegno $\Phi(C)$. Per il *Teorema 3.2* sappiamo che $\mathbb{R}^2 \setminus \Phi(C)$ ha due componenti connesse, di cui una sola limitata ma entrambe con bordo $\Phi(C)$. Se l'origine appartenesse alla componente connessa illimitata allora $\Phi(C)$ sarebbe bordo di una regione regolare semplice, il cui interno chiamiamo Ω , e quindi C sarebbe bordo della regione regolare semplice $\Phi^{-1}(\Omega)$, ma questo va contro ciò che abbiamo appena visto. Allora l'origine deve appartenere a Ω . Per assurdo, sia ora

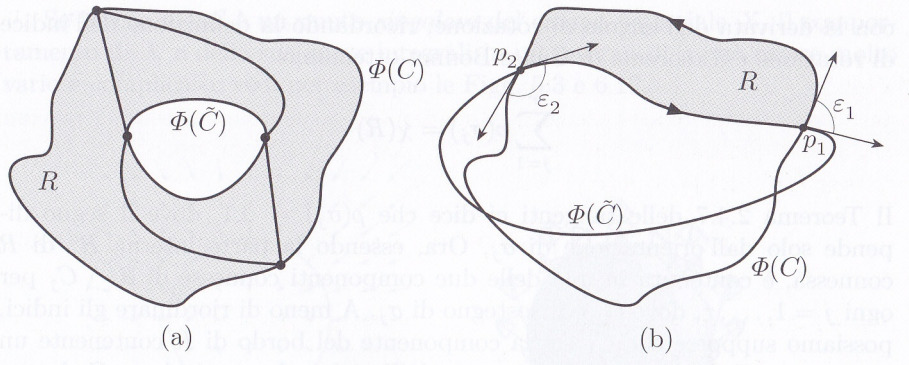


Figura 3.5:

$\tilde{\sigma} : \mathbb{R} \rightarrow S$ un'altra geodetica chiusa semplice con sostegno \tilde{C} diverso da C . Ragionando come prima si ha che l'origine è contenuta anche nell'interno di $\Phi(\tilde{C})$.

Se $C \cap \tilde{C} = \emptyset$ allora $\Phi(C)$ e $\Phi(\tilde{C})$ sono una contenuta nell'altra e quindi sono il bordo di una regione regolare $R \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Possiamo quindi costruire una triangolazione di R come in *Figura 3.6 (a)* con 4 facce, 8 lati e 4 vertici, allora $\chi(R) = 0$. Ma in tal caso C e \tilde{C} formano il bordo della regione regolare $\Phi^{-1}(R) \subset S$ e otteniamo

$$0 = 2\pi\chi(\Phi^{-1}(R)) = \int_{\Phi^{-1}(\Omega)} Kdv < 0,$$

impossibile.

L'unica possibilità rimasta da esaminare è questa: C e \tilde{C} si devono intersecare in almeno due punti poichè l'unicità della geodetica uscente da un punto lungo una data direzione implica che C e \tilde{C} non possono essere tangenti in un solo punto di intersezione. Possiamo, quindi, trovare, come in *Figura 3.6 (b)* due punti di intersezione consecutivi, un arco in C da p_1 a p_2 e un arco in \tilde{C} da p_2 a p_1 che formino il bordo di una regione regolare semplice R con due vertici di angoli esterni ε_1 e ε_2 . Allora

$$2\pi = 2\pi\chi(R) = \int_R Kdv + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 < 2\pi,$$

poichè $|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| < 2\pi$, ma anche ciò è assurdo. Quindi è assurdo supporre che esista $\tilde{\sigma}$ ed esiste una sola geodetica. \square

Con il *teorema di Gauss-Bonnet* possiamo anche calcolare la caratteristica di Eulero-Poincaré delle regioni regolari del piano:

Corollario 3.1. *Sia $R \subset \mathbb{R}^2$ una regione regolare del piano e supponiamo che il bordo di R abbia $r \geq 1$ componenti connesse. Allora*

$$\chi(R) = 2 - r.$$

Dimostrazione. Siano $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ i poligoni curvilinei, orientati positivamente rispetto a R , che formano il bordo di R . Per la *Proposizione 0.8* la curvatura geodetica di una curva sul piano coincide con la derivata dell'angolo di rotazione, che indicheremo con θ . Allora, per la definizione di indice di rotazione, otteniamo:

$$\sum_{j=1}^r \int_{a_j}^{b_j} \kappa_g^j ds = \sum_{j=1}^r [\theta(b_j) - \theta(a_j) - \varepsilon_j] = 2\pi \sum_{j=1}^r \rho(\sigma_j) - \sum_{j=1}^r \varepsilon_j.$$

Ricordando che la curvatura Gaussiana nel piano è zero, sostituendo la espressione precedente nella formula del *teorema di Gauss-Bonnet* abbiamo

$$\sum_{j=1}^r \rho(\sigma_j) = \chi(R),$$

dove $\rho(\sigma_j) = \pm 1$ a seconda dell'orientazione di σ_j . La parte interna R^0 di R è connessa quindi è contenuta in una delle due componenti connesse di $\mathbb{R}^2 \setminus C_j$, dove C_j è il sostegno di σ_j . Supponiamo che C_1 sia la componente del bordo di R contenente un punto $p_0 \in R$ di distanza massima d_0 dall'origine: C_1 è tangente alla circonferenza C di centro l'origine e raggio d_0 . R_0 è contenuta nella parte interna di C_1 poichè dev'essere contenuta nella parte interna di C e dev'essere aderente a p_0 , quindi non può essere contenuta nella

componente connessa illimitata di $\mathbb{R}^2 \setminus C_1$. Ora, σ_1 è orientata positivamente rispetto a R , per cui $\rho(\sigma_1) = +1$.

Per $j = 2, \dots, r$ la componente C_j è contenuta nell'interno di C_1 allora R^0 è contenuta nella componente connessa illimitata di $\mathbb{R}^2 \setminus C_j$. Abbiamo, quindi, che σ_j , orientata positivamente rispetto a R , ha indice di rotazione -1 ; dunque $\rho(\sigma_1) + \dots + \rho(\sigma_j) = 1 - (r - 1) = 2 - r$. \square

3.2.2 Regioni regolari senza bordo

1. Segue subito dal *teorema di Gauss-Bonnet* che se S è una superficie compatta orientabile, quindi S è una regione regolare senza bordo, allora

$$\int_S K dv = 2\pi\chi(S).$$

Questo risultato si può anche dimostrare direttamente usando ciò che abbiamo visto nel paragrafo 3.2. Mostriamolo qui su due semplici esempi.

- **Il toro:**

indichiamo con Ω un toro, esso può essere tagliato in due domini Ω_1 e Ω_2 non semplicemente connessi usando due circonferenze, cioè dividiamo il toro in due cilindri. Queste circonferenze formano un bordo comune ai due domini. Se orientiamo tali circonferenze in modo coerente con l'orientazione indotta da Ω su Ω_1 e Ω_2 abbiamo che l'orientazione di $\partial\Omega_1$ è opposta a quella di $\partial\Omega_2$. Abbiamo così:

$$\int_{\Omega_1} K dv + \int_{\partial\Omega_1} \kappa_g ds = 0,$$

$$\int_{\Omega_2} K dv + \int_{\partial\Omega_2} \kappa_g ds = 0.$$

(L'uguaglianza a zero dipende da quanto abbiamo provato nel paragrafo 3.2.1.)

Ma poichè $\int_{\partial\Omega_1} = - \int_{\partial\Omega_2}$ sommando le due espressioni otteniamo

$$\int_{\Omega_1} K dv + \int_{\Omega_2} K dv = \int_{\Omega} K dv = 0.$$

- **La sfera:**

anche in questo caso tagliamo una sfera Ω in due domini emisferici Ω_1 e Ω_2 semplicemente connessi, calotta superiore e calotta inferiore, con una circonferenza equatoriale C chiusa. Essa farà da bordo a entrambi i domini e come prima se orientiamo tale circonferenza in modo coerente con l'orientazione indotta da Ω su Ω_1 e Ω_2 abbiamo che

l'orientazione di $\partial\Omega_1$ è opposta a quella di $\partial\Omega_2$. Allora, applicando il Teorema 3.1:

$$\int_{\Omega_1} Kdv + \int_C \kappa_g ds = 2\pi,$$

$$\int_{\Omega_2} Kdv - \int_C \kappa_g ds = 2\pi.$$

Quindi, sommando le due espressioni, otteniamo

$$\int_{\Omega} Kdv = 4\pi.$$

2. Una superficie compatta orientabile con curvatura Gaussiana $K \geq 0$ e positiva in almeno un punto è omeomorfa alla sfera. Questo segue dal Teorema 2.5 e dal punto 1. Questo significa che, comunque si deformi una sfera (Figura 3.2), l'integrale della curvatura Gaussiana non cambia, rimane cioè 4π .

Il teorema di Gauss-Bonnet, quindi, lega la curvatura Gaussiana, ogget-



Figura 3.6: una deformazione della sfera

to locale e dipendente dalla struttura differenziabile, e la caratteristica di Eulero-Poincaré, oggetto globale e dipendente solo dalla topologia.

3.2.3 Problemi di vario genere

Ricordiamo che

Definizione 3.5 (Punti ellittici, iperbolici, parabolici). Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientata con mappa di Gauss $N : S \rightarrow S^2$. Diremo che $p \in S$ è *ellittico* se $K(p) > 0$ (cioè tutte le curvature normali in p hanno lo stesso segno), *iperbolico* se $K(p) < 0$ (ci sono curvature normali in p di segno opposto) e *parabolico* se $K(p) = 0$ ma $dN_p \neq 0$.

Affrontiamo ora alcuni problemi:

1. Ogni superficie compatta $S \subset \mathbb{R}^3$ contiene un aperto di punti ellittici.

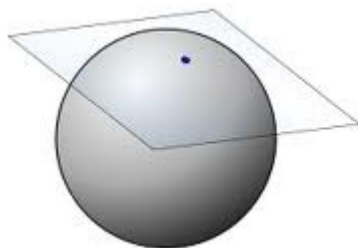


Figura 3.7:

S compatta allora ha un punto p_0 di massima distanza dall'origine e vogliamo mostrare che p_0 è ellittico.

Indichiamo con $S_0 \subset \mathbb{R}^3$ la sfera di centro l'origine e raggio $\|p_0\|$, allora $p_0 \in S_0 \cap S$ ed S è contenuta nella palla chiusa di bordo S_0 . In particolare, S è tangente a S_0 in p_0 e quindi p_0 è ortogonale a $T_{p_0}S = T_{p_0}S_0$.

Assumiamo S orientabile (poichè ci stiamo interessando di un intorno di p_0) e scegliamo una mappa di Gauss $N : S \rightarrow S^2$ tale che $N(p_0) = p_0 / \|p_0\|$. Sia ora $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ una curva parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco tale che $\sigma(0) = p_0$. La funzione $f(s) = \|\sigma(s)\|^2 = \langle \sigma(s), \sigma(s) \rangle$ assume un massimo assoluto quando $s = 0$ e quindi deve avere derivata seconda non positiva in 0. Deriviamo rispetto ad s e otteniamo

$$f'(s) = \langle \dot{\sigma}(s), \sigma(s) \rangle + \langle \sigma(s), \dot{\sigma}(s) \rangle = 2\langle \dot{\sigma}(s), \sigma(s) \rangle$$

$$f''(s) = 2[\langle \ddot{\sigma}(s), \sigma(s) \rangle + \langle \dot{\sigma}(s), \dot{\sigma}(s) \rangle].$$

Valutiamo $f''(0)$:

$$f''(0) = 2[\langle \ddot{\sigma}(0), \sigma(0) \rangle + \|\dot{\sigma}(0)\|^2].$$

Poichè $\sigma(0) = p_0$ ed s è parametro naturale per σ abbiamo che

$$f''(0) = 2[\langle \ddot{\sigma}(0), p_0 \rangle + 1].$$

Dato che $N(p_0) = N(0) = \frac{p_0}{\|p_0\|}$ abbiamo che

$$f''(0) = 2[\langle \ddot{\sigma}(0), N(0) \rangle \|p_0\| + 1].$$

Ricordando che $\langle \ddot{\sigma}(0), N(0) \rangle$ è la curvatura normale di S in p_0 lungo la direzione tangente a σ , chiamiamola $\kappa_n(0)$, abbiamo che

$$f''(0) = 2[\kappa_n(0) \|p_0\| + 1].$$

3.2. APPLICAZIONI

Poichè sappiamo che $f''(0) \leq 0$ otteniamo:

$$\kappa_n(0) \leq -\frac{1}{\|p_0\|} < 0.$$

Allora tutte le curvatures normali di S in p_0 hanno lo stesso segno, poichè σ era una curva arbitraria, e quindi p_0 è ellittico. Per concludere, $K(p_0) > 0$ implica che K è positiva in tutto un intorno di p_0 e quindi S contiene un aperto di punti ellittici.

2. Sia S una superficie compatta orientabile di \mathbb{R}^3 non omeomorfa ad una sfera. Allora S contiene punti ellittici, punti iperbolici e punti a curvatura Gaussiana nulla.

S non è omeomorfa ad una sfera, allora la sua caratteristica di Eulero-Poincaré $\chi(S)$ è minore o uguale a 0. Dal teorema di Gauss-Bonnet globale segue che

$$\int_S K dv \leq 0.$$

Dal (1) sappiamo che S contiene un aperto di punti ellittici, allora possiamo considerare una triangolazione $\{T_1, \dots, T_r\}$ di S tale che T_1 sia contenuto in un aperto di punti ellittici. Inoltre $\int_S K dv = \sum_{i=1}^r \int_{T_i} K dv \leq 0$. Siccome $\int_{T_1} K dv > 0$, dobbiamo avere $\sum_{i=2}^r \int_{T_i} K dv < 0$. K deve assumere valori strettamente negativi su S e quindi, per la continuità di K e per la connessione di S , anche il valore nullo.

3. Sia S una superficie orientabile di \mathbb{R}^3 con $K \leq 0$ ovunque. Sia $R \subset S$ una regione regolare semplice il cui bordo sia un poligono geodetico. Allora il poligono ha almeno tre vertici. Di conseguenza, in S una geodetica chiusa e semplice non può essere bordo di una regione semplice.

R è semplice allora $\chi(R) = 1$. Dal teorema di Gauss-Bonnet applicato a R :

$$\int_R K dv = 2\pi - \sum_{h=1}^p \varepsilon_h,$$

dove $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p$ sono gli angoli esterni. Siccome $\int_R K dv \leq 0$, dobbiamo avere $\sum_{h=1}^p \varepsilon_h \geq 2\pi$. Ma $\varepsilon_h \in (-\pi, \pi)$ e quindi $p > 2$.

Bibliografia

- [1] Marco Abate, Francesca Tovena. *Curve e superfici*. Springer-Verlag, 2006.
- [2] Abraham Goetz. *Introduction to differential geometry*. Addison-Wesley Publishing Company, 1970.
- [3] Pavel Sergeevic Aleksandrov. *Topologia combinatoria*. Edizioni scientifiche Einaudi, 1957.
- [4] Nicola Fusco, Paolo Marcellini, Carlo Sbordone. *Analisi matematica due*. Liguori, 1996.
- [5] Carsten Thomassen. *The Jordan-Schonflies theorem and the classification of surfaces*. American Mathematical Monthly, 1992.

Ringraziamenti

E finalmente i doverosi ringraziamenti:

- al Professor Alzati, relatore di questa tesi, per la sua disponibilità, per la sua precisione e per tutto l'aiuto che mi ha fornito durante la stesura.
- a Nunzia, Alberto, Caterina, Paco e... Catone, si dai anche a lui. Grazie per il sostegno, mai venuto meno, nonostante le discussioni, per le domeniche tranquille e spensierate, quelle da divano e coperta, per le risate, per aver sempre cercato di darmi una mano e per l'affetto che solo una famiglia sa dare.
- a Ben, Filo, Nano, Lollo, Dade, Muzzo, Ale, Ilteo, Ale, Monique, Gae, Fede, Lara, Sara, Ciccio, Ste, Ste, Elvis, Mic, Dossi, Mono, Vale, Tommi, Andre, Bara, Balto, Mic, Mary, Giò, Tommi, Pes, Davide, Marta, FedeRosso, Lau, Teo, Luspian, Chia, Mara, Jobby, Marti, Isa, Ja, Viò, Giuma, Silvi, Sara, Pao, Maru, Tona, Benzi, Fra, Ire, Lucia, Spe, Ale e Jack grazie perchè siete la mia seconda famiglia: i sorrisi, l'allegria, gli aperitivi, le serate, le risate, i giochi, le partite, gli allenamenti, il preparare gli esami, le chiacchiere...

Spero di non aver dimenticato nessuno, mi scuso... non era mia intenzione.