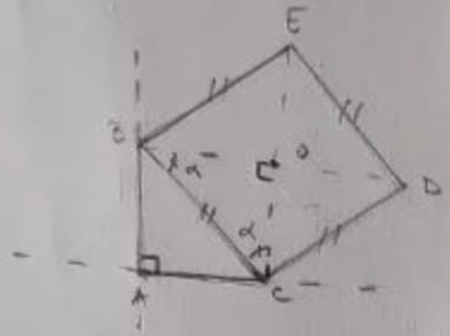
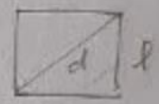
1



Voglio dimostrare che O è equidistante dalle rette AB e AC quindi voglio dimostrare che $\overline{OB} = \overline{OC}$

$\overline{OB} = \overline{OC} = \frac{1}{2} d$, d è la diagonale del quadrato

$d = \sqrt{2}\, l$, l è il lato del quadrato



quindi $\overline{OB} = \overline{OC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \overline{BC}$

Inoltre voglio che $\overline{OB}$ e $\overline{OC}$ siano $\perp$ alle rette

quindi $O\hat{C}A = O\hat{B}A = \pi/2$

Per costruzione $\overline{OB} \parallel \overline{AC}$ e $\overline{OC} \parallel \overline{AB}$

ma sappiamo che $\overline{OB} \perp \overline{OC}$, infatti sono diagonali,

quindi $\overline{OC} \perp \overline{AC}$ e $\overline{OB} \perp AB$

(2)

$$\begin{cases} P(1) = P(3) = P(5) = \bar{P} & \text{, dispari} \\ P(2) = P(4) = P(6) = \tilde{P} & \text{, pari} \\ P(1) = \bar{P} = 2P(2) = \tilde{P} \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} 3\bar{P} + 3\tilde{P} = 1 \\ 6\tilde{P} + 3\tilde{P} = 1 \end{array}$$

quindi
$$\begin{cases} \tilde{P} = 1/9 \\ \bar{P} = 2/9 \end{cases}$$

$$P(\text{numero primo}) = P(1) + P(2) + P(3) + P(5) = 3\bar{P} + \tilde{P} = 7\tilde{P} = 7/9$$

$$P(\text{almeno } 3) = P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 2\bar{P} + 2\tilde{P} = 6/9$$

$$P(\text{al più } 3) = P(1) + P(2) + P(3) = 2\bar{P} + \tilde{P} = 5/9$$

(3)

$$\begin{cases} A = (1, -2, 0) \\ B = (2, 3, -1) \\ C = (1, -6, 7) \end{cases}$$

$A, B \in r$

C è il centro della sfera

Un vettore parallelo alla retta è $\overline{AB} = B - A$

$\overline{AB} = (2-1, 3+2, -1) = (1, 5, -1)$

Le equazioni della retta sono $r: \begin{cases} \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \\ \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \end{cases}$

in cui $\overline{AB} = (l, m, n)$

e $A = (x_0, y_0, z_0)$

Quindi $r: \begin{cases} x - 1 = \frac{y+2}{5} \\ \frac{y+2}{5} = -z \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 5x - y - \frac{7}{5} = 0 \\ y + 5z + 2 = 0 \end{cases}$

L'equazione della sfera è

$S: (x-1)^2 + (y+6)^2 + (z-7)^2 = R^2$, R è il raggio

Il centro C non soddisfa le equazioni della retta

quindi $C \notin r$

Il vettore direzione della retta è $\vec{v} = \overline{AB} = (1, 5, -1)$

Voglio ricavare l'equazione del piano ortogonale

ad r e passante per C

In generale per un piano si ha che

$\mathbb{P}: \ ax + by + cz + d = 0$

$\vec{n} = (a, b, c)$ è il vettore ortogonale al piano

Voglio che $\vec{v} \parallel \vec{n}$ quindi impongo ad esempio $\vec{v} = \vec{n} = (1, 5, -1)$

$x + 5y - z + d = 0$ e deve passare per il centro C

quindi $1 - 30 - 7 + d = 0 \longrightarrow d = 36$

Calcolo l'intersezione tra piano e retta

$$\begin{cases} 5x - y - \frac{7}{5} = 0 \ , \quad y = 5x - 7/5 \\ y + 5z + 7 = 0 \ , \quad 5x + 7/5 + 5z = 0 \\ x + 5y - z + 36 = 0 \ , \quad x + 25x + 73 - z = 0 \end{cases}$$

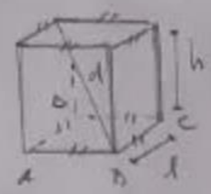
$$\begin{cases} y = 5x - 7/5 \longrightarrow y = -\frac{519}{135} \\ z = -x + \frac{x}{135} \longrightarrow z = \frac{113}{135} \\ 26x + 73 + x + \frac{x}{135} = 0 \longrightarrow 27x = -\frac{146}{5} \ , \ x = -\frac{146}{135} \end{cases}$$

Voglio che la sfera sia tangente alla retta quindi impongo che $R = d_{PC}$, d_{PC} è la distanza fra il centro C e il punto $P = \left(-\frac{146}{135}, -\frac{519}{135}, \frac{113}{135}\right)$

$d_{PC} = \sqrt{(x_P - x_C)^2 + (y_P - y_C)^2 + (z_P - z_C)^2} \simeq 6{,}5 = R$

quindi $S: \ (x-1)^2 + (y+6)^2 + (z-7)^2 = R^2 = (6{,}5)^2$

(4)



ABCD quadrato

$A_{tot} = A_{lat} + 2A_b$, A_{lat} superficie laterale

A_b area di base.

Voglio minimizzare A_{lat} infatti A_b non dipende dalla diagonale del parallelepipedo

In generale $d > h$

Per un parallelepipedo retto $A_{lat} = lh = l\sqrt{d^2-h^2}$

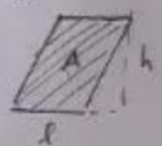
quindi è minima per d minima

Per un parallelepipedo generico a base quadrata

le superfici laterali sono parallelogrammi

con $A = lh$

ma anche in questo caso $h \propto d$ (per costruzione)



In entrambi i casi, minimizzando d, minimizziamo h

e quindi A_{lat}

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - (ax^3 + bx)}{x^3} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{x - \frac{x^3}{6} - ax^3 - bx}{x^3} \right) + \underbrace{\frac{o(x^5)}{x^3}}_{\to 0 \text{ per } x \to 0} = 1$$

Voglio
$$\begin{cases} b = 1 \\ -\frac{1}{6} - a = 1 \longrightarrow a = -\frac{7}{6} \end{cases}$$

⑦

$$f(x) = \begin{cases} -1 + \arctan x & , x < 0 \\ ax + b & , x \geq 0 \end{cases}$$

La funzione è derivabile quando la derivata è continua in $x = 0$

$$\frac{df(x)}{dx} = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & , x < 0 \\ a & , x \geq 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} a = 1 \\ b \in \mathbb{R} \end{array}$$

La funzione è inoltre continua in $x = 0$

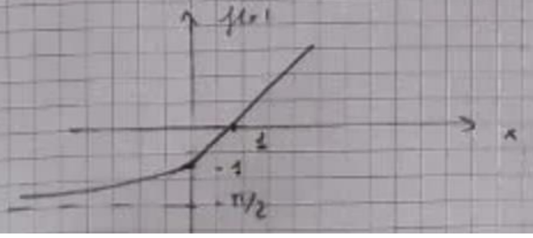
se $-1 + \cancel{\arctan(0)} = 0 + b$, $b = -1$

$$f(x) = \begin{cases} -1 + \arctan x & , x < 0 \\ x - 1 & , x \geq 0 \end{cases}$$

continua e derivabile in $\mathbb{R}$

ma $\nexists$ $[a,b] \in \mathbb{R}$ tale che $f(a) = f(b)$

quindi non vale il Teorema di Rolle



infatti $\nexists$ x_0 tale che $f'(x_0) = 0$

8

$f_a(x) = x^5 - 5ax + a \quad , \quad a > 0$

$D_{f_a(x)} = \mathbb{R}$, dominio

$$\begin{cases} \dfrac{df_a(x)}{dx} = 5x^4 - 5a = 0 \longrightarrow x^4 = a \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x = \pm a^{1/4} \\ \dfrac{d^2 f_a(x)}{dx2} = 20x^3 \end{cases}$$

$\left.\dfrac{d^2 f_a(x)}{dx^2}\right|_{x = a^{1/4}} > 0 \quad , \quad x = a^{1/4}$ pt di minimo

$\left.\dfrac{d^2 f_a(x)}{dx^2}\right|_{x = -a^{1/4}} < 0 \quad , \quad x = -a^{1/4}$ pt di massimo

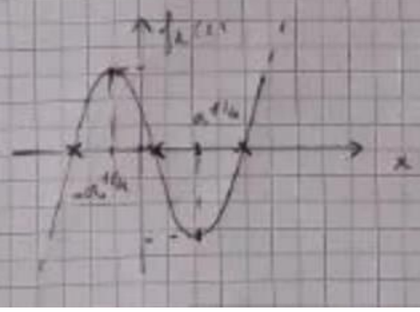
$\lim_{x \to -\infty} f_a(x) = -\infty \quad \forall a > 0$

$\lim_{x \to +\infty} f_a(x) = +\infty \quad \forall a > 0$

$f_a(a^{1/4}) = a^{4/5} - 5a^{5/4} + a < 0 \quad \forall a > 0$

$f_a(-a^{1/4}) = -a^{4/5} + 5a^{5/4} + a > 0 \quad \forall a > 0$

quindi



possiede 3 zeri distinti

Fonte: Studenti.it - https://www.studenti.it/quesito-di-matematica-n-7-svolto-seconda-prova-matematica-2023-liceo-scientifico.html